



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

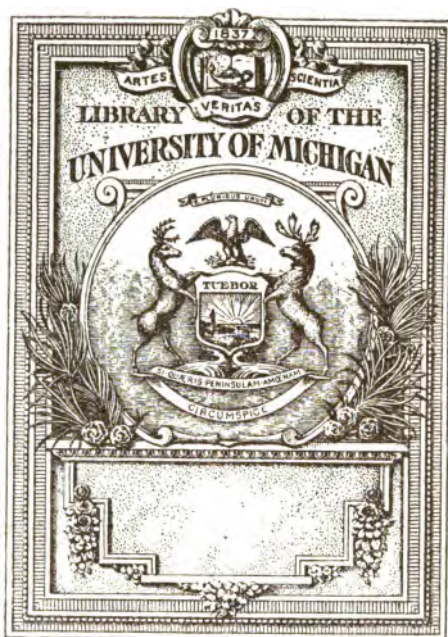
Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

- + *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
- + *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
- + *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
- + *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

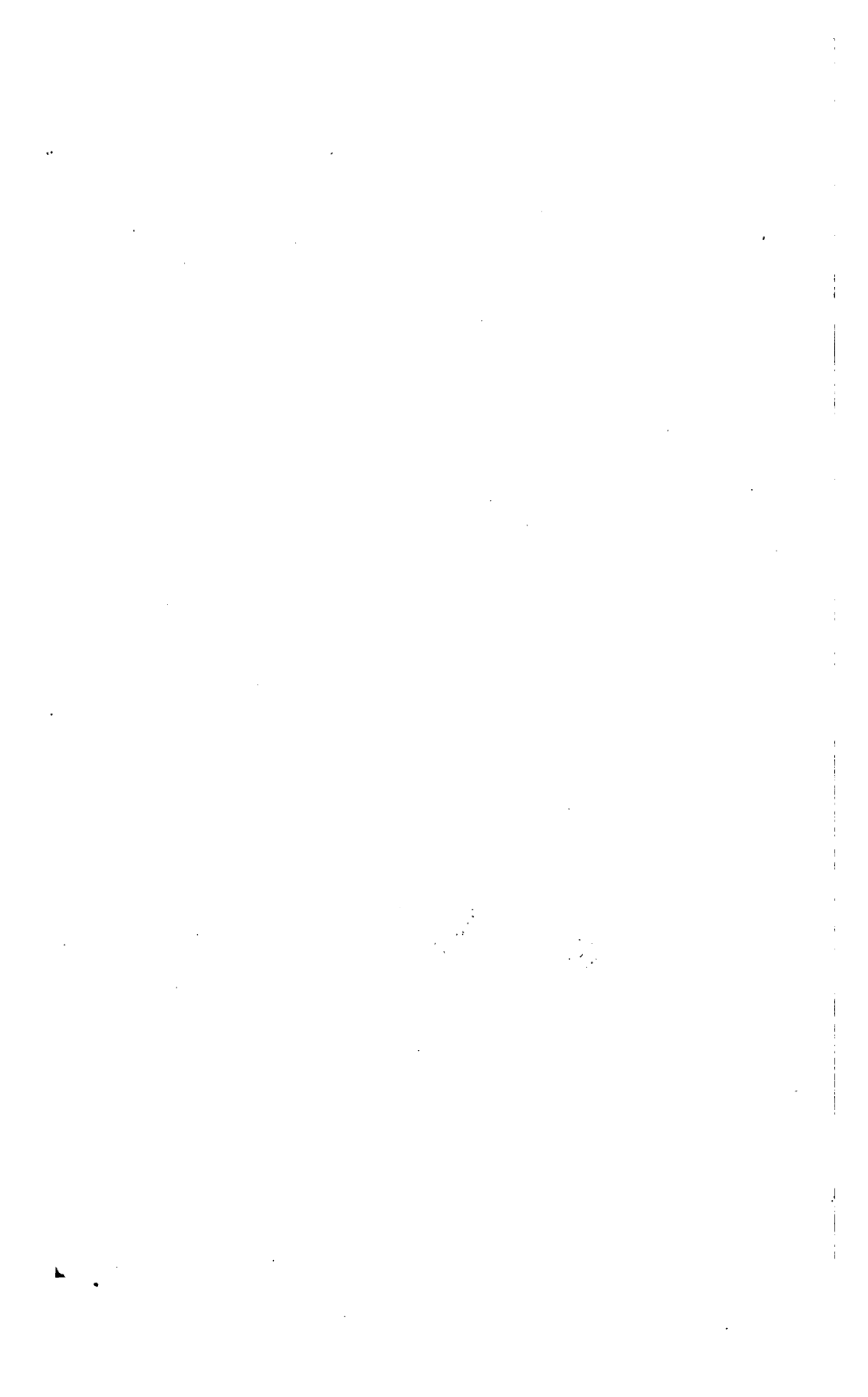
À propos du service Google Recherche de Livres

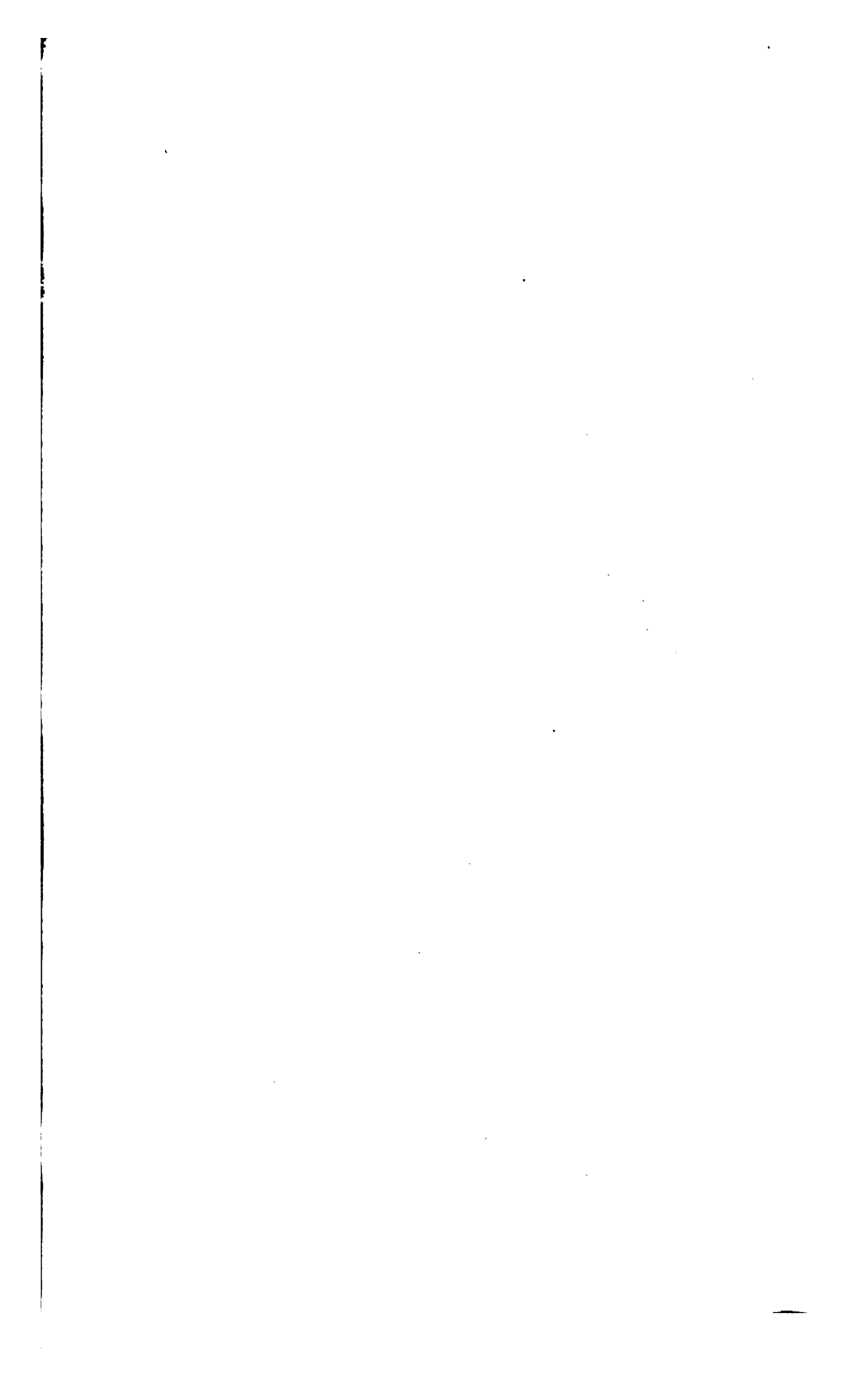
En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse <http://books.google.com>

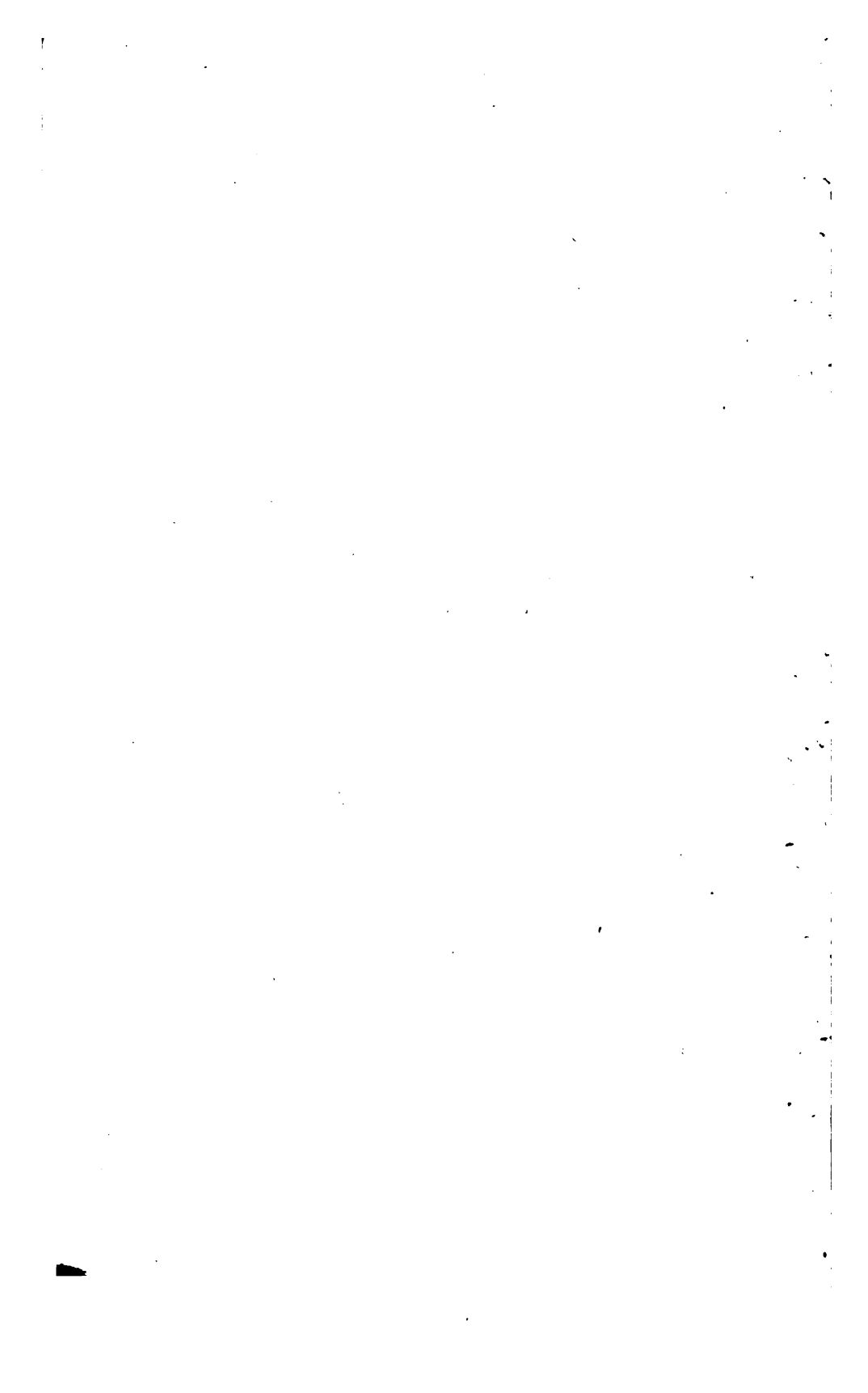


THE GIFT OF
PROF. ALEXANDER ZIWET

QA
935
B43
1862







THÉORIE
DE
LA RÉSISTANCE
DES SOLIDES

Paris. — Typographie HENNUYER, rue du Boulevard, 7.

365

Alexander Zinck 5.

THÉORIE
DE
LA RÉSISTANCE
DE
LA TORSION ET DE LA FLEXION PLANE
DES SOLIDES

DONT LES DIMENSIONS TRANSVERSALES SONT PETITES
RELATIVEMENT A LEUR LONGUEUR.

PAR

J.-B. BELANGER,

Professeur à l'Ecole centrale des Arts et Manufactures,
Ancien ingénieur en chef des Ponts et Chaussées et ancien professeur de Mécanique
aux Ecoles impériales des Ponts et Chaussées et Polytechnique.

—
SECONDE ÉDITION, AUGMENTÉE.

PARIS

MALLET-BACHELIER,

IMPRIMEUR-LIBRAIRE

de l'Ecole polytechnique et de l'Ecole
centrale.

Quai des Augustins, 55.

DUNOD,

Successeur de Carilian-Gœury et Vor Dalmont,

Libraire des Corps impériaux
des Ponts et Chaussées et des Mines.

Quai des Augustins, 49.

1862

1.



Rep. Alex. Zivert
71.
12-17-1923

TABLE DES MATIÈRES

	Pages.
AVANT-PROPOS.....	XI

§ I. Extension et compression d'un prisme par une charge longitudinale uniformément répartie.

1. Allongement permanent et allongement élastique.....	1
2. Expériences sur le fer forgé.....	2
3. Limite de l'élasticité.....	2
4. Limite pratique de la tension du fer.....	6
5. Coefficient d'élasticité.....	7
6. Extension de la fonte de fer.....	8
7. Extension des bois.....	9
8. Contraction latérale des prismes allongés.....	9
9. Compression d'un prisme chargé longitudinalement.....	11
10. Conséquences des données expérimentales précédentes.....	11
11. Maçonnerie.....	12

§ II. De la déformation par glissement observée dans la torsion des prismes.

12. Angle de torsion. Résistance par unité de surface.....	13
13. L'axe de torsion contient les centres de gravité des sections transversales.....	15
14. Inclinaison des fibres longitudinales.....	15
15. Moments d'inertie polaires de quelques surfaces.....	15

	Pages.
16. Questions diverses résolues par les équations précédentes.....	16
17. Valeurs expérimentales de G , et de la limite de F	17
18. Exemple de l'usage des formules qui précèdent.....	19

§ III. Généralités sur la flexion plane d'une pièce solide naturellement prismatique.

19. Plan de flexion. Forces élastiques. Effort tranchant. Tension totale. Moment fléchissant.....	21
20. Répartition inégale des forces élastiques longitudinales. Fibre moyenne. Fibres neutres.....	23
21. Allongement et tension de la fibre moyenne. Valeurs extrêmes de la force élastique longitudinale.....	27
22. Courbure de la fibre moyenne.....	27
23. Quantité EI ou κ improprement appelée moment de flexion.....	28
24. Fibre moyenne fléchie circulairement.....	28
25. Equation dérivée de la fibre moyenne.....	28
26. Cas particulier, forces transversales.....	30

§ IV. Formules des moments d'inertie de diverses surfaces planes.

27. Parallélogramme dont un côté est parallèle à l'axe du moment.....	33
28. Rectangle évidé symétriquement.....	33
29. Parallélogramme dont une diagonale est l'axe du moment.....	33
30. Section d'un cylindre ou d'un tuyau cylindrique circulaire.....	33
31. Ellipse pleine dont un diamètre principal est l'axe du moment.....	34
32. Triangle dont un côté est parallèle à l'axe du moment.....	35
33. Surface plane quelconque.....	36

§ V. Cas simples de la flexion plane d'une pièce naturellement prismatique, sous l'action de forces transversales.

34. Prisme fléchi par deux forces distinctes et une charge uniformément répartie.....	37
35. Efforts tranchants.....	38
36. Pressions longitudinales.....	39

TABLE DES MATIÈRES.

VII

Pages.

37. Inclinaison variable de la fibre moyenne sur un axe.....	39
38. Ordonnées de la fibre moyenne.....	40
39. Cas particulier, $\alpha = 0$, $P_1 = 0$	41
40. Prisme reposant librement sur deux appuis de niveau.....	45
41. Prisme encastré et reposant en outre sur un second appui.....	45
42. Cas particulier du numéro précédent, $y_2 - \alpha_0 a = 0$ et $p = 0$	46
43. Cas plus particulier, mêmes données et $l = \frac{1}{2}a$	47
44. Autre cas particulier du numéro 41, $\alpha = 0$, $y_2 = 0$, $P = 0$	47
45. Portion de prisme encastrée à ses extrémités.....	49
46. Cas particulier, $\alpha = \beta = 0$, $y_2 = 0$, $P = 0$	51
47. Cas plus particulier, mêmes hypothèses et $l = \frac{1}{2}a$	52
48. Autre cas particulier du numéro 45, $P = 0$	53
49. Remarque sur l'extension de la méthode précédente.....	54

§ VI. Généralisation des questions précédentes sur les prismes chargés transversalement.

50. Questions à résoudre : Recherche des relations entre les quantités ϵ , les moments fléchissants, les inclinaisons et les coordonnées des points de la fibre moyenne.....	55
51. Efforts tranchants.....	56
52. Moments fléchissants.....	58
53. L'effort tranchant est exprimé par la dérivée relative à l'abscisse x du moment fléchissant changé de signe.....	60
54. Inclinaisons de la fibre moyenne.....	60
55. Ordonnées de la fibre moyenne.....	61
56. Récapitulation des formules précédentes.....	62
57. Applications : Premier cas. Inclinaison initiale et forces toutes données.....	63
58. Deuxième cas. Encastrement en un point, simples appuis en d'autres points.....	63
59. Troisième cas. Deux encastrements et forces intermédiaires données.....	64
60. Quatrième cas. Simples appuis en nombre quelconque.....	64
61. Cas particulier du problème précédent. Charges uniformément réparties entre les appuis.....	65
62. Recherche des moments fléchissants. Relations entre les moments μ_0 et μ_1 , et les inclinaisons α et α_1 , qui se rapportent à deux appuis consécutifs.....	65

*Il ne
considère
que la
charge
égal.*

63. Relations entre les moments fléchissants sur trois appuis consécutifs et les différences de niveau de ces points. Formule de M. Clapeyron, pour le cas où les appuis sont de niveau.....	66
64. Calcul des inclinaisons, des ordonnées et des efforts tranchants...	68
65. Calcul des réactions des appuis.....	68
66. Applications. Deux travées égales, également chargées. Les trois appuis de niveau.....	68
67. Deux travées égales, également chargées. L'appui intermédiaire plus bas que les deux autres.....	69
68. Quatre travées égales, également chargées. Les cinq appuis de niveau.....	72
69. Quatre travées égales, également chargées. Appuis à différents niveaux.....	74
70. Poutre uniformément chargée et divisée par cinq appuis en quatre travées symétriquement égales deux à deux.....	77
71. Poutres naturellement courbes substituées aux poutres droites.....	80
72. Poutre prismatique en trois travées destinées à diverses épreuves...	80
73. Autre cas particulier de l'énoncé du numéro 60. Trois appuis, deux forces intermédiaires distinctes, et charges uniformément réparties.....	85
74. Cas plus particulier.....	86
75. Aiguilles d'un barrage soutenant une charge d'eau.....	87

§ VII. Détermination des dimensions du profil en travers d'une pièce chargée transversalement.

76. Condition déduite de la pression longitudinale et de l'effort tranchant.	90
77. Résistance au glissement longitudinal des fibres. Cas du profil rectangulaire.....	91
78. Même question pour un profil en forme de double T.....	95
79. Résistance d'un prisme dans le cas de torsion et de flexion simultanées.....	97

§ VIII. Solides d'égale résistance à fibre moyenne sensiblement rectiligne.

80. Section transversale variable. Les relations du numéro 20 subsistent.....	98
81. Cas d'une force transversale unique. Condition d'égale tension longitudinale extrême dans les diverses sections.....	98

TABLE DES MATIÈRES.

IX

Pages.

82. Sections rectangulaires de hauteur constante.....	100
83. Sections transversales circulaires ou semblables.....	100
84. Remarque sur l'impropriété de l'expression d'égale résistance appliquée à l'égale tension longitudinale.....	100
85. Problème général de l'égalité de résistance.....	101
86. Changements brusques de section.....	102

§ IX. Prisme chargé parallèlement à sa fibre moyenne.

97. Prisme chargé suivant sa fibre moyenne.....	103
98. Règles pratiques.....	105
99. Supports en bois. Expériences de Rondelet et de Hodgkinson.....	106
90. Colonnes en fonte. Formules de Hodgkinson.....	108
91. Influence de l'assujettissement des bases et du renflement des colonnes.....	110
92. Prisme assujéti verticalement à une extrémité et chargé d'un poids à une distance donnée de l'autre extrémité.....	111
93. Solution approximative du même problème.....	112

§ X. Poutres armées.

94. Poutre soutenue par un poinçon.....	115
95. Poutre soutenue par trois poinçons.....	117

§ XI. Flexion plane d'une pièce courbe.

96. Ligne moyenne.....	123
97. Efforts tranchants et forces élastiques longitudinales.....	124
98. Déplacement angulaire des sections normales.....	125
99. Variation des coordonnées des points de la ligne moyenne.....	127
100. Interprétation des formules précédentes.....	130
101. Recherche des réactions des appuis et des inclinaisons initiales : Premier cas. Pièce non symétrique reposant simplement sur deux appuis.....	133
102. Deuxième cas. Pièce symétrique et symétriquement chargée; deux simples appuis.....	135
103. Troisième cas. Deux simples appuis, dont l'un est un plan horizontal sans frottement.....	136
104. Quatrième cas. Pièce encastrée à ses deux extrémités.....	136

**§ XII. Résistance des vases cylindriques pressés
uniformément.**

	Pages.
105. Profil exactement circulaire. Tension suivant ce profil.....	139
106. Tension suivant la longueur du cylindre.....	141
107. Cas d'un profil faiblement elliptique. Recherche du moment fléchissant.....	141
108. Tensions parallèlement à la fibre moyenne.....	144
109. Déformation du profil elliptique.....	145

(Voir l'Errata, page 148.)

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

AVANT-PROPOS

La partie de la science de l'ingénieur qui a pour objet la stabilité et l'économie des constructions, eu égard aux limites de la résistance des matériaux, comprend des généralités qu'il importe de connaître d'abord : évidemment, avant d'essayer de se rendre compte des causes qui peuvent compromettre la durée d'un ensemble de pièces constituant une construction quelconque, il faut être en état de résoudre la même question pour une pièce unique soumise à des efforts déterminés par toutes les données nécessaires. C'est le sujet traité, pour les cas les plus ordinaires, dans cet opuscule, rédaction succincte des leçons que je fais à l'Ecole centrale des Arts et Manufactures, au commencement de mon Cours sur la Mécanique appliquée.

La Mécanique appliquée diffère essentiellement de la Mécanique générale ou rationnelle, en ce que celle-ci, s'appuyant sur un très-petit nombre de lois absolues de la nature matérielle, en déduit par le raisonnement des conséquences rigoureuses, affranchies de toute exception ; tandis que la Mécanique appliquée emprunte à des expériences spéciales des lois plus ou moins approximatives sur les forces qui doivent entrer dans ses calculs sur les mouvements qu'elles produisent. Telles sont les lois du frottement et celle de l'élasticité des corps solides ; telle est l'hypothèse du mouvement par tranches parallèles dans certains problèmes d'hydraulique ; telle est notamment, dans les recherches sur la déformation par allongement, contraction, torsion ou flexion des corps longs et étroits, la supposition par

laquelle on admet, comme nous le verrons, que les molécules primitivement situées dans un plan transversal quelconque se déplacent dans l'espace en conservant toujours leurs mêmes positions relatives, de sorte qu'on se ferait une image des modifications que reçoivent ces corps si on les considérait comme composés de disques invariables unis entre eux par des ressorts dont le jeu répondrait à tout petit mouvement par écartement, rapprochement ou glissement de ces disques.

Sans doute ce sont là des hypothèses qui ne sont pas d'une complète exactitude ; mais elles ont l'avantage de faciliter l'application du calcul aux questions qui intéressent l'art des constructions, et de fournir des solutions dont l'approximation est suffisante pour les besoins de la pratique.

Au reste, ces hypothèses une fois posées, la théorie procède avec la rigueur mathématique et applique sans altération les vérités absolues de la Mécanique générale. Ainsi, dans tous les cas où un corps, après s'être plus ou moins déformé sous l'action de certaines forces, finit par rester immobile, si l'on considère une portion définie de ce corps, les forces extérieures qui la sollicitent satisfont nécessairement aux relations qu'on nomme les *six conditions générales de l'équilibre*, et dont la recherche et la discussion appartiennent à la statique. Disons seulement ici que ces forces extérieures sont : le poids de la portion de corps dont il s'agit, les actions exercées par les corps voisins qui l'ont suivie dans sa déformation, les réactions des appuis supposés fixes, enfin les forces dites élastiques qu'exercent sur cette portion de corps les autres portions du même corps qu'on en détache par la pensée.

THÉORIE
DE
LA RÉSISTANCE,
DE
LA TORSION ET DE LA FLEXION PLANE
DES SOLIDES
DONT LES DIMENSIONS TRANSVERSALES SONT PETITES
RELATIVEMENT A LEUR LONGUEUR.

§ 1.

**EXTENSION ET COMPRESSION D'UN PRISME PAR UNE CHARGE
UNIFORMÉMENT RÉPARTIE.**


1. Allongement permanent et allongement élastique. —
Une tige prismatique, que nous supposons verticale et invariablement fixée à son extrémité supérieure, est disposée pour être chargée, vers l'autre extrémité, de poids dont la résultante sera dirigée suivant l'axe moyen de la tige, c'est-à-dire suivant la droite qui contient les centres de gravité de ses sections droites. Sa longueur entre deux repères tracés sur la pièce elle-même, à quelque distance des points extrêmes, est exactement mesu-

rée. La tige, ainsi soumise à une traction longitudinale qu'on fait croître lentement, afin que ni la tige ni la charge ne prennent une vitesse sensible, s'allonge d'une quantité qui croît avec l'intensité de l'effort. Si la charge diminue ensuite, la tige reprend une moindre longueur. En certains cas, elle conserve, quand la charge est complètement supprimée, une certaine augmentation de longueur, dite *allongement permanent*. La partie de l'allongement total qui disparaît par la suppression de la tension s'appelle *allongement élastique*.

2. Expériences sur le fer. — Depuis longtemps des expériences ont été faites sur le sujet dont il s'agit ici, notamment en ce qui concerne le fer en barre ou en fil. Les plus récentes et les plus complètes paraissent être celles de M. E. Hodgkinson, physicien anglais, cité par M. le général Morin dans ses leçons de *Mécanique pratique*. J'extrais de ce dernier ouvrage les faits consignés dans les colonnes 1, 3 et 4 du tableau ci-joint, et j'y ajoute les colonnes 2, 5, 6 et 7 qui s'en déduisent. Ces détails sont relatifs à une série d'expériences faites sur une tige de fer forgé de la meilleure qualité, de 15 mètres de longueur totale et de 0^m,01313 de diamètre moyen. Ils aideront à comprendre les observations suivantes.

3. Limite de l'élasticité. — Tant que dans cette expérience la charge n'excède pas 15 kilogrammes par millimètre carré, l'allongement permanent est peu sensible; bien qu'il croisse avec la charge posée d'abord et retirée ensuite, il atteint à peine un cent-millième de la longueur primitive; et si on le compare à l'allongement total observé sous l'action de la charge, il n'en est qu'environ la centième partie.

Mais au delà de 15 kilogrammes par millimètre carré, à mesure que la charge augmente, l'allongement permanent devient une fraction de plus en plus grande de l'allongement total. Ainsi, par exemple, lorsque la charge a été de 22^{kg},5 par milli-

CHARGE par millimètre quarré en kilogrammes.	NOMBRES propor- tionnels aux charges.	ALLONGEMENT EN MILLIMÈTRES PAR MÈTRE			RAPPORT de l'allon- gement permanént à l'allon- gement total.	QUOTIENT de la charge divisée par l'allonge- ment élastique.
						
		Total.	Permanent.	Élastique.		
kg.		mm.	mm.	mm.		
1,87	1	0,082	»	0,082	»	22,8
3,75	2	0,185	»	0,185	»	20,2
5,62	3	0,284	0,003	0,281	0,009	20,0
7,50	4	0,380	0,003	0,377	0,009	19,9
9,37	5	0,478	0,004	0,471	0,009	19,9
11,25	6	0,571	0,008	0,566	0,009	19,9
13,12	7	0,666	0,007	0,659	0,010	19,9
15,00	8	0,760	0,010	0,750	0,013	20,0
16,87	9	0,873	0,033	0,840	0,038	20,1
18,75	10	1,013	0,083	0,930	0,082	20,2
20,64	11	1,283	0,262	1,021	0,204	20,2
22,50	12	2,360	1,130	1,230	0,479	18,1
24,36	13	4,287	3,071	1,216	0,717	20,0
26,25	14	9,951	8,574	1,377	0,861	19,1
28,12	15	10,493	9,102	1,391	0,868	20,0
après 1 h	—	11,750	—	—	—	—
— 3	—	11,934	—	—	—	—
— 5	—	11,959	—	—	—	—
— 7	—	12,027	—	—	—	—
— 10	—	12,027	—	—	—	—
30,00	16	17,888	16,515	1,373	0,923	21,8
—	—	20,220	18,889	1,331	0,934	22,5
31,87	17	21,486	19,795	1,691	0,921	18,9
—	—	21,702	—	—	—	—
33,75	18	24,774	22,709	2,065	0,917	16,3
—	—	25,225	—	—	—	—
35,62	19	34,935	32,820	2,115	0,940	17,0
—	—	35,202	—	—	—	—
37,46	20	Rupture de la tige.			—	—

mètre carré, l'allongement qui a subsisté après la suppression de cette charge a été d'environ moitié de l'allongement total, et, par conséquent, à peu près égal à l'allongement élastique disparaissant en même temps que la traction. Lorsque la charge a été de $35^{\text{m}},6$ par millimètre carré, l'allongement permanent s'est trouvé de près de 33 millimètres par mètre et plus des $9/10$ de l'allongement total.

L'expérience relative à la charge de 28 kilogrammes par millimètre carré a été prolongée pendant dix heures, et a donné lieu de constater que la tige a mis sept heures à prendre l'allongement total de $0^{\text{m}},012$ par mètre, dépassant d'environ $1/7$ celui qui avait été obtenu aussitôt après la pose de la charge. Mais aucun nouvel accroissement ne s'est manifesté pendant les trois heures suivantes; ce qui prouve que, sous une charge égale aux $3/4$ de celle qui produirait la rupture immédiate, une tige peut se maintenir en équilibre stable. D'autres expérimentateurs, et entre autres MM. Minard et Ardan, avaient depuis longtemps constaté ce fait.

Les expériences de M. Hodgkinson semblent, sur un autre point important, confirmer l'opinion émise par d'autres physiiciens, notamment par M. Wertheim, qui ont nié l'existence rigoureuse de ce qui est appelé la *limite de l'élasticité* d'un corps solide.

On sait que l'élasticité est la tendance qu'ont les corps à revenir à leur forme primitive, quand la cause qui les en a écartés vient à cesser. Dans les corps solides, des efforts qui dépassent certaines limites entraînent, soit des déformations permanentes, soit la rupture (exemples : un fil de fer doux, un fil d'acier trempé).

Mais les constructeurs admettent généralement que, si les forces qui ont produit les changements de forme ne sont pas trop grandes, leur effet disparaît *complètement*, dès que ces forces cessent d'agir; qu'ainsi, par exemple, une tige de fer soumise à une traction longitudinale qui ne dépasse pas 6 kilogrammes par mètre carré de section transversale *conserve son*

élasticité, c'est-à-dire que non-seulement elle ne prend, sous cette charge, quelle qu'en soit la durée, qu'un allongement déterminé, mais que, quand la charge cesse, la tige reprend la longueur qu'elle avait avant l'application de la force. C'est en ce sens qu'on dit que la charge de 6 kilogrammes par mètre carré ne dépasse pas la *limite de l'élasticité* de la tige.

Or, suivant M. Wertheim, qui ne s'est ainsi prononcé qu'après de nombreuses expériences sur divers métaux, « *une vraie limite d'élasticité n'existe pas*, et si l'on n'observe pas d'allongement permanent pour les premières charges, c'est qu'on ne les a pas laissées agir pendant assez de temps, et que la verge soumise à l'expérience est trop courte, relativement au degré d'exactitude de l'instrument qui sert aux mesures. » (*Mémoires de physique mécanique*, 1848, 1^{er} Mém., p. 68.)

Les deux opinions contraires que nous venons de rapporter nous paraissent pouvoir se concilier suivant les circonstances. Si une tige métallique, telle que la livre la fabrication, est soumise à un effort de traction, pendant un temps suffisant pour prendre un état d'équilibre stable, et si ensuite on supprime cette charge, elle ne reviendra que partiellement à sa longueur primitive ; elle gardera, comme dans l'expérience de M. Hodgkinson, un certain allongement, dit permanent, plus ou moins sensible. Mais si on la reprend dans cet état pour lui faire subir de nouveau la même charge, en procédant avec lenteur pour éviter toute secousse, il nous paraît, sinon démontré, au moins extrêmement plausible, que la tige reprendra la même longueur totale, en subissant seulement un allongement élastique, un allongement qui disparaîtra par la suppression de la charge.

S'il en était autrement, et si, chaque fois que la charge serait reproduite, un surcroît d'allongement permanent devait avoir lieu, il serait bien difficile de comprendre pourquoi la même charge, maintenue constamment, ne produirait pas à la longue un allongement indéfini, et finalement la rupture, tandis que

l'expérience d'une foule de constructions, parfaitement stables, repousse absolument cette hypothèse.

Nous pensons donc que la tige dont nous parlons, à partir de l'état d'allongement permanent qu'elle a reçu, doit être considérée comme perfectionnée par cet étirage une fois produit, et devenue parfaitement élastique relativement aux efforts de traction qu'elle peut subir, jusqu'à la limite convenablement modérée de la plus grande tension qu'elle a déjà subie. Ce maximum que peut alors atteindre la tension sans produire un nouvel accroissement permanent pourrait s'appeler la *limite relative de l'élasticité* du corps dont il s'agit.

Ces considérations pourront servir à nos lecteurs pour étudier avec fruit les ouvrages ou mémoires où se trouvent consignés les résultats de nombreuses expériences sur le fer et sur d'autres métaux, résultats qui, comme on doit le pressentir, diffèrent suivant la qualité plus ou moins impure du métal, son mode de fabrication sous forme de barre ou de fil, son état d'écrassage ou de recuit, etc. Il n'entre pas dans notre plan de reproduire ici ces détails, mieux placés dans un cours de construction.

4. Limite pratique de la tension du fer. — L'Administration des travaux publics exige que les dimensions transversales des chaînes ou des câbles des ponts suspendus soient calculées de manière qu'au moment de l'épreuve, qui ajoute au poids du pont une charge de 200 kilogrammes par mètre carré de plancher, la tension n'excède pas pour les fers en barre le tiers, et pour les fils de fer le quart de celle qui produirait la rupture, ce qui revient à environ 12 kilogrammes par millimètre carré pour les barres et 18 kilogrammes par millimètre carré pour les fils les plus résistants. La tension des fers, lorsque le pont n'est pas chargé, est à peu près moitié de ce qu'elle est pendant l'épreuve.

En général, dans la prévision d'efforts accidentels supérieurs aux charges permanentes, on calcule ordinairement les dimen-

sions des pièces de fer, de manière à réduire leur tension habituelle à 6 kilogrammes par millimètre carré.

5. **Coefficient d'élasticité.** — La simple inspection de la dernière colonne du tableau de la page 3 fait reconnaître cette loi remarquable : que non-seulement jusqu'à la limite de 13 kilogrammes par millimètre carré, où l'allongement permanent ne s'est trouvé que d'environ 1 centième de l'allongement total, mais bien au delà de cette limite et jusqu'à la charge de 30 kilogrammes par millimètre carré, *l'allongement élastique* est resté à fort peu près proportionnel à la charge. C'est ce qu'on exprime par la formule :

$$N = E\Omega \frac{\Delta L}{L} \quad \text{ou} \quad N = E\Omega i, \quad \text{ou} \quad \frac{N}{\Omega} = Ei,$$

où N est la charge totale normale à la section droite du prisme,

Ω , l'aire de cette section, et par conséquent $\frac{N}{\Omega}$ la charge

par unité de surface de cette même section,

L , la longueur que reprend le prisme quand la charge est supprimée,

ΔL , l'allongement élastique total du prisme,

i , le rapport $\frac{\Delta L}{L}$, dit *allongement proportionnel* ou allon-

gement par unité de la longueur sans charge,

E , une quantité appelée *coefficient* ou *module d'élasticité*, qui pour le fer forgé a la valeur approximative 20, lorsque N est exprimé en kilogrammes, ΔL en millièmes de l'unité de L , et Ω en millimètres carrés.

Si, comme nous le supposerons généralement dans nos formules, l'aire Ω est calculée en prenant pour unité superficielle le mètre carré, et si l'allongement ΔL est rapporté à la

même unité linéaire que L , on a, avec une exactitude suffisante,

$$N = 20 \times 1000000 \Omega \times \frac{1000 \Delta L}{L}$$

et par conséquent

$$E = 20 \times 10^9.$$

En appliquant la formule $N = E\Omega i$ aux trois cas indiqués à l'article 4, où la tension du fer serait

de 18, de 12, et de 6^{ks} par mm. q.,

on trouve que les valeurs de i qui y correspondent sont :

$$0,0009; 0,0006 \text{ et } 0,0003,$$

c'est-à-dire 9, 6 et 3 dixièmes de millimètre par mètre de longueur primitive. On voit par là combien est faible la déformation longitudinale que le fer subit dans les constructions.

6. Extension de la fonte de fer. — Des expériences sur la fonte de fer donnent des résultats analogues à ceux du fer forgé, mais moins réguliers. Le coefficient d'élasticité E pour les charges inférieures à 6 kilogrammes par millimètre carré est d'environ 9×10^9 , moins de la moitié de celui de la fonte, c'est-à-dire que, sous une même tension et avec les mêmes dimensions primitives, la fonte s'allonge plus que le fer dans le rapport de 20 à 9.

La rupture de la fonte a lieu sous une tension de 9^{ks},5 à 13 kilogrammes par millimètre carré. Dans la pratique, la règle suivie est de ne faire subir à la fonte qu'une tension permanente qui n'excède pas le sixième de la charge produisant par extension la rupture, c'est-à-dire de 1^{ks},5 à 2 kilogrammes par

millimètre carré. La valeur correspondante de i est de 0,00017 à 0,00022.

7. Extension des bois. — Le coefficient d'élasticité des bois est très-variable, ainsi que la limite des tensions qu'ils peuvent sans danger supporter dans les constructions. Les ouvrages de MM. Navier, Poncelet, A. Morin, contiennent sur ce sujet de nombreux renseignements qu'on fera bien de consulter. Nous nous bornons à rapporter ici quelques nombres dont on pourra faire usage dans les applications des formules à des exemples numériques.

	COEFFICIENT d'élasticité.	TENSION par millimètre carré qu'il convient de ne pas dépasser.
Bois de chêne.....	de $0,6 \times 10^9$ à $1,2 \times 10^9$	de 0 ^{kg} ,6 à 0,8
Bois de sapin.....	de $1,0 \times 10^9$ à $1,2 \times 10^9$	de 0 ^{kg} ,8 à 0,9

8. Contraction latérale des prismes allongés. — Un prisme soumis à un effort longitudinal se rétrécit transversalement en même temps qu'il s'allonge, phénomène dont on peut apercevoir la cause dans la constitution des corps solides naturels, considérés comme des assemblages de points matériels dont les actions mutuelles varient avec leurs distances. Pour rendre cette considération sensible par un exemple très-simple, imaginons un système de quatre points matériels m' , m'' , m''' et m^{iv} (fig. 1), égaux et situés aux quatre sommets d'un carré. Supposons-le en équilibre sans l'action d'aucune force extérieure; il n'est pas nécessaire pour cela que les actions mutuelles entre ces quatre points soient nulles; il suffit que la résultante des forces que chaque point reçoit des trois autres le soit; qu'ainsi les forces que le point m' reçoit des points m''

Suber?

et m^{IV} dont il est plus voisin que de m^{II} soient répulsives par suite de la supériorité de l'action de la chaleur sur celle de la gravitation, et que, au contraire, la force dirigée suivant la diagonale soit attractive, c'est-à-dire qu'entre les deux points m' et m''' la gravitation, quoique moindre qu'entre m' et m'' , l'emporte sur la répulsion due à la chaleur et décroissant suivant une loi plus rapide par l'augmentation de la distance. Supposons maintenant qu'aux deux points m' et m''' diagonalement opposés soient appliquées deux forces extérieures F' et F'' égales et contraires, qui tendent à écarter ces deux points. Pour que le repos s'établisse après la déformation du système, il faut non-seulement que la diagonale $m' m'''$ soit plus grande que dans le premier cas, mais aussi que l'autre diagonale soit diminuée; car le point m'' , qui n'est soumis à aucune force extérieure, doit être encore en équilibre sous l'action des forces qu'il reçoit des trois points m' , m''' , m^{IV} . Si la distance $m'' m^{IV}$ restait la même, les forces répulsives totales entre m'' et m' d'une part, et entre m'' et m''' d'autre part, se trouveraient diminuées, parce que les distances $m'' m'$ et $m'' m'''$ seraient devenues plus grandes; l'angle $m' m'' m'''$ serait d'ailleurs augmenté; donc par une double raison, la résultante de ces deux forces serait diminuée, tandis que la force attractive entre m'' et m^{IV} serait restée la même, l'équilibre n'aurait par conséquent pas lieu; donc il faut, par compensation, que la diagonale $m'' m^{IV}$ soit diminuée, ce qui augmente la plus petite et diminue la plus grande des forces inégales dont nous venons de parler.

La déformation contraire aurait lieu si les deux forces extérieures tendaient à rapprocher les deux points m' , m''' ; les deux autres devraient s'écarter pour que l'équilibre pût se rétablir.

Suivant une savante théorie due à M. Poisson, si un prisme homogène est soumis à des forces égales uniformément réparties sur les deux bases, la longueur et l'aire de la section droite

du prisme étant L et Ω dans son état naturel, et devenant $L + \Delta L$ et $\Omega - \Delta \Omega$, on a, pourvu que la limite de l'élasticité ne soit pas dépassée,

$$\frac{\Delta \Omega}{\Omega} = \frac{1}{2} \frac{\Delta L}{L},$$

c'est-à-dire que la contraction superficielle par unité de la section droite est numériquement la moitié de l'extension par unité de longueur du prisme, d'où l'on conclut, à cause de la petitesse de ces variations, que la contraction linéaire relative en travers du prisme est le quart de son extension relative longitudinale i .

On voit par là que dans la pratique la contraction latérale est bien peu sensible, sauf le cas de rupture imminente.

9. Compression d'un prisme chargé longitudinalement.

— L'expérience prouve que dans le cas de compression longitudinale, pourvu qu'on prenne les précautions convenables pour empêcher le prisme de fléchir, et que la pression reste suffisamment inférieure à la valeur qui produit l'écrasement, la relation $N = E\Omega i$ subsiste encore, le coefficient E conservant la même valeur, et les quantités N et i changeant de signe en même temps.

Quant à la limite pratique, la pression qu'on ne dépasse pas ordinairement par millimètre carré est de 6 kilogrammes pour le fer forgé, qui s'écrase sous une pression de 25 kilogrammes, tandis qu'elle pourrait aller à plus de 10 kilogrammes pour la fonte, qui ne s'écrase que sous une charge d'environ 60 kilogrammes par millimètre carré.

10. Conséquences des données expérimentales précédentes.

— Par la comparaison des coefficients d'élasticité du fer et de la fonte, ainsi que des tensions et pressions qui produisent leur rupture et leur écrasement, on voit que la fonte supporte une moindre tension et une plus forte pression que le

fer, mais que, soit par extension, soit par compression, elle se déforme plus que le fer; c'est ce qui porte à préférer ce dernier dans les ouvrages qui doivent être exposés à des efforts variables et où l'on désire éviter les déformations trop sensibles.

11. Maçonnerie. — Pour les ouvrages en pierre, qui ne sont guère soumis qu'à des pressions, on admet assez généralement, d'après l'observation des constructions dont l'expérience a constaté la solidité, qu'on ne doit charger les maçonneries en pierres de taille que du dixième, et les maçonneries en moellons que du vingtième du poids qui suffirait pour écraser les matériaux dont elles sont composées.

§ 2.

DE LA DÉFORMATION PAR GLISSEMENT OBSERVÉE DANS LA TORSION DES PRISMES.

12. Angle de torsion. — Résistance par unité de surface.
— Un cylindre ou prisme (ou portion de prisme) que, pour faciliter le langage, nous supposons vertical, étant fixé vers son extrémité supérieure, et sollicité à l'autre bout par des forces qui équivalent à un couple (P, P) situé dans un plan transversal AA (fig. 2 dont la partie supérieure est une projection verticale, et l'autre une projection horizontale), on remarque, en faisant abstraction du poids propre du corps, supposé très-petit, que sans altération sensible ni dans sa longueur ni dans la figure de sa section droite, il subit une torsion qui consiste en ce que les tranches transversales très-minces dont le prisme est composé tournent, en glissant les unes relativement aux autres, autour d'un axe intérieur CC' du corps. L'équilibre qui s'établit, après cette déformation, exige que toute partie $BA'A'$, comprise entre l'extrémité fixe et un plan transversal $A'A'$, exerce sur la partie $A'A'AA$, située de l'autre côté de ce plan, des forces dues au déplacement relatif de ces deux portions du même corps et réductibles à un couple égal et de sens contraire au premier. C'est une conséquence nécessaire de ce que, dans la partie comprise entre les deux plans AA et $A'A'$, il n'y a pas d'autres forces *extérieures* que celles qui constituent le couple (P, P) et les forces élastiques que les molécules situées près et au-dessus du plan $A'A'$ exercent sur les molécules

qui, faisant partie du système matériel $A'A'AA$, sont situées près et au-dessous du même plan. Si l'on appelle :

- θ l'angle de torsion de la pièce, par unité de longueur,
- $d\omega$ l'aire d'un élément superficiel pris dans une tranche quelconque, telle que $A'A'$,
- r la distance de cet élément à l'axe qui ne change pas dans l'état de torsion, -

on satisfait aux phénomènes observés en admettant que cet élément est sollicité à revenir à sa position naturelle par une force $Fd\omega$ (analogue au frottement, résistance au glissement d'un corps sur un autre), proportionnelle à l'aire $d\omega$, à l'angle de torsion θ et à la distance r . On pose donc

$$Fd\omega = G\theta r d\omega \quad \text{ou} \quad F = G\theta r, \quad [1]$$

équation dans laquelle F est la résistance, par unité de surface, tangentielle au cercle dont le rayon est r , et G est un coefficient à déterminer par expérience, suivant la substance du prisme, et dont l'expression numérique dépend des unités auxquelles sont rapportés l'angle θ et les dimensions linéaires.

Cela étant, en désignant par Pp le moment résultant des forces qui agissent extérieurement sur le prisme dans le plan AA , on doit avoir pour l'une des conditions de l'équilibre d'une portion quelconque de celui-ci, l'équation de moments autour de l'axe de torsion

$$Pp = G\theta \int r^2 d\omega,$$

L'intégrale $\int r^2 d\omega$ est le moment d'inertie polaire de l'aire de la section droite du prisme autour du point O où elle est traversée par l'axe de torsion. En le représentant par I_0 , on écrit ainsi la dernière équation :

$$Pp = G\theta I. \quad [2]$$

13. L'axe de torsion passe par le centre de gravité des sections transversales. — Lorsque la section droite du prisme est un cercle ou un polygone régulier, il est évident que l'axe de torsion passe par le centre de cette figure. En général, les forces $G\theta r d\omega$ étant équivalentes à un couple, la somme de leurs projections sur un axe quelconque doit être nulle. Soit O (fig. 2) le centre de rotation d'une section transversale, et soient dans son plan deux axes rectangulaires Ox , Oy . En désignant par x et y les coordonnées de l'élément $d\omega$, on a la projection de $F d\omega$ ou $G\theta r d\omega$ sur Ox égale à

$$G\theta d\omega r \sin(r, x), \text{ ou } G\theta y d\omega.$$

Or l'ensemble des forces $F d\omega$ faisant équilibre à un couple, la somme des projections de ces forces sur un axe est nulle ; donc $G\theta \int y d\omega = 0$, donc le centre de gravité est sur Ox , c'est-à-dire sur un axe quelconque passant en O ; donc il est en O .

Par conséquent ce que nous avons désigné par I_0 est le moment d'inertie polaire de la section droite du prisme autour de son centre de gravité.

14. Inclinaison des fibres longitudinales. — Les molécules qui, dans l'état naturel du corps, étaient sur une parallèle à l'axe, à une distance r , se trouvent dans l'état de torsion situées sur une hélice dont l'angle α avec l'axe longitudinal est évidemment déterminé par l'équation

$$\tan \alpha = r\theta. \quad [3]$$

15. Moments d'inertie polaires des surfaces les plus simples. — Lorsque la section droite est un cercle dont le rayon est ρ , on a (*Géom. anal.*, n° 369)

$$I_0 = \int r^2 d\omega = \int_0^\rho r^2 \cdot 2\pi r dr = \frac{1}{2} \pi \rho^4.$$

Pour la section droite d'un tuyau cylindrique dont les rayons sont ρ et ρ' , on a

$$I_0 = \frac{1}{2} (\rho^4 - \rho'^4).$$

Si la section droite est un rectangle dont les côtés sont a et b , on a (*Géom. anal.*, n° 377)

$$I_0 = \int (x^2 + y^2) d\omega = 2 \int_0^a b x^2 dx + 2 \int_0^b a y^2 dy,$$

$$I_0 = \frac{1}{12} ab (a^3 + b^3).$$

Si c'est un carré, $b = a$,

$$I_0 = \frac{1}{6} a^4.$$

16. Questions diverses résolues par les équations précédentes. — Les équations [1], [2] et [3] entre les sept quantités G , I_0 , Pp , r , F , θ et α , permettent de résoudre les diverses questions dans lesquelles trois de ces quantités sont inconnues.

Si le prisme est donné par sa nature qui détermine le coefficient G , par son moment d'inertie polaire I_0 , et si l'on cherche la relation de sa déformation caractérisée par l'angle de torsion θ , avec le moment Pp , on tire immédiatement de l'équation [2]

$$\theta = \frac{Pp}{GI_0}.$$

Réciproquement cette équation donnera G , si, après avoir calculé I_0 d'après les dimensions transversales de la pièce, on observe expérimentalement l'angle θ de la torsion produite par le moment connu Pp .

L'angle α de l'hélice correspondante à un rayon r pris à volonté, par exemple au plus grand rayon du prisme, se déduit, en fonction des données G , I_0 et Pp , des équations [2] et [3], savoir :

$$\tan \alpha = \frac{Ppr}{GI_0}. \quad [4]$$

Si, connaissant Pp , I_0 et se donnant r , on cherche la résistance F au glissement transversal, rapportée à l'unité de surface, au point situé à la distance r de l'axe, on élimine $G\theta$ des équations [1] et [2], et l'on obtient

$$F = \frac{Ppr}{I_0}. \quad [5]$$

d'où l'on voit que cette force F , croissant, suivant l'hypothèse de cette théorie, proportionnellement à r , ne dépend pas du coefficient G variable avec la nature spéciale du corps.

Si l'on cherche la relation entre la force F par une unité de surface et l'angle α , tous deux relatifs à une même distance r à l'axe, on a, en éliminant θ , des équations [1] et [3],

$$F = G \tan \alpha.$$

17. Valeurs expérimentales de G et de la limite de F . —

En rapprochant de l'équation [2] les résultats de l'ensemble des expériences connues, on a été conduit, comme le dit M. Morin (ouvrage cité au numéro 2), à admettre assez généralement pour le coefficient G les valeurs suivantes :

Fer forgé, de $6\,000 \cdot 10^6$ à $6\,666 \cdot 10^6$	Cuivre.....	$4\,366 \cdot 10^6$
Acier d'Allemagne.. $6\,000 \cdot 10^6$	Bronze.....	$1\,066 \cdot 10^6$
Acier fondu très-fin. $10\,000 \cdot 10^6$	Chêne.....	$400 \cdot 10^6$
Fonte..... $2\,000 \cdot 10^6$	Sapin.....	$433 \cdot 10^6$

Ces valeurs supposent que l'angle θ est exprimé par le rap-

On demande les relations qui lient entre elles ces sept quantités.

La force P et la réaction du coussinet forment un couple, puisque l'axe du cylindre reste rectiligne. Ainsi le moment Pp , dans les formules précédentes, doit être remplacé par Pl .

Le cylindre étant plein, il faut (15) faire

$$I_0 = \frac{1}{2} \pi p^4 = \frac{1}{32} \pi D^4.$$

L'angle θ doit être exprimé par

$$\pi \frac{n}{180} \frac{1}{L}.$$

Cela posé, la formule [5] donne

$$F_1 = \frac{\frac{1}{2} PlD}{\frac{1}{32} \pi D^4} = \frac{Pl}{0,1963 D^3}.$$

relation indépendante du coefficient G , de la longueur L et de l'angle de torsion.

Si l'on veut, par exemple, déterminer D , de manière que F n'excède pas 6×10^6 , c'est-à-dire 6 kilogrammes par millimètre carré, ce qui convient pour le fer forgé, on fera au plus

$$D = \sqrt[3]{\frac{Pl}{6 \times 196300}}$$

l'unité étant le mètre.

La formule [2], qu'il faut employer quand on prend en considération l'angle de torsion, devient dans les circonstances énoncées plus haut

$$Pl = G \frac{\pi n}{180L} \frac{\pi D^4}{32} = \frac{GnD^4}{1833L}$$

et peut servir, par exemple, à calculer l'une des quantités Pl , G , D et $\frac{n}{L}$, quand on connaît les trois autres.

§ 3.

GÉNÉRALITÉS SUR LA FLEXION PLANE D'UNE PIÈCE SOLIDE NATURELLEMENT PRISMATIQUE.

19. Plan de flexion. Forces élastiques. Effort tranchant Tension moyenne. Moment fléchissant. — Lorsqu'un corps ou une portion de corps prismatique est sollicité, dans l'espace compris entre l'une de ses extrémités et une section transversale, par des forces qui ne sont réductibles ni à une force unique dirigée suivant l'axe passant par les centres de gravité des sections droites, ni à un couple perpendiculaire à cet axe, l'équilibre ne peut s'établir à moins que ce corps ne se courbe d'une manière plus ou moins sensible.

Si la section transversale du prisme a des dimensions qui ne diffèrent pas trop entre elles, comme dans le cas d'une poutre ou d'une solive ordinaire, et si la limite de l'élasticité n'est pas dépassée, l'expérience constate, au moins approximativement, que les éléments matériels qui se trouvaient primitivement dans une tranche quelconque perpendiculaire aux arêtes longitudinales restent encore, après la déformation du solide, dans un plan normal aux courbes qui remplacent ces arêtes rectilignes, sans déformation notable de la tranche.

Nous admettons, dans tout ce qui suit, que ces conditions soient remplies.

Soit $A'A''L$ (fig. 3) une portion d'un prisme ainsi fléchi. Nous supposons, ce qui arrive le plus souvent dans la pratique, que ce corps étant dans l'état naturel formé de deux parties

symétriques relativement à un plan longitudinal, soit sollicité, dans l'intervalle de $A'A''$ à l'extrémité L , par des forces extérieures P situées dans ce plan, ou satisfaisant deux à deux à la même condition de symétrie. Il en résulte que le corps est fléchi parallèlement et symétriquement à ce même plan, que nous appelons par cette raison *plan de flexion*, et que nous prenons pour celui de la figure. Les tranches transversales dont nous venons de parler lui sont perpendiculaires.

L'équilibre n'existe sous l'action des forces P que parce que la portion $A'A''L$ du prisme reçoit des molécules voisines, appartenant à la portion qui est de l'autre côté du plan $A'A''$ (à gauche dans la figure), des forces qui réunies aux forces P satisfont, comme forces extérieures, aux conditions de cet équilibre. Ces forces, dites *forces élastiques*, peuvent être décomposées en forces parallèles au plan $A'A''$ et en forces perpendiculaires à ce plan. Pour cela, prenons dans le plan de flexion deux axes passant par le centre de gravité de la section $A'A''$, l'un Gx , perpendiculaire à ce plan, et dirigé vers la seconde extrémité L de la partie de prisme considérée, l'autre Gy , dirigé dans cette section, suivant l'un ou l'autre des deux sens possibles, de sorte qu'au lieu d'être pris positivement du côté de la concavité de la pièce fléchie, comme l'indique la figure, il pourrait l'être en sens contraire. Les forces élastiques parallèles à cet axe Gy ont, à cause de l'équilibre, leur résultante exprimée par $-\Sigma P_y$; celles qui lui sont perpendiculaires ont la leur égale à $-\Sigma P_x$, sauf le cas d'un couple; enfin la somme des moments des forces élastiques autour de l'axe projeté en G est égale à $-\Sigma M_G P$, le sens positif des moments des forces P allant en tournant de l'axe Gx vers l'axe Gy .

La force ΣP_y s'appelle l'*effort tranchant* des forces P , qui tend à faire glisser la portion du prisme située à droite de $A'A''$ sur la partie à gauche, suivant ce plan. Nous la désignerons plus simplement par T ; ainsi

$$\Sigma P_y = T.$$

La force ΣP_x s'appelle la *tension totale* entre les deux portions contiguës au plan $A'A''$. Nous la désignerons, pour abréger, par N ; ainsi

$$\Sigma P_x = N.$$

Elle devient *pression totale* quand la somme ΣP_x est négative, allant dans le sens de L vers G .

La somme $\Sigma \mathcal{M}_G P$ s'appelle le *moment résultant des forces fléchissantes*, ou plus simplement *moment fléchissant* des forces P autour de l'axe G .

Nous le désignerons souvent pour abréger par la lettre μ , et nous nous rappellerons qu'il est égal et contraire au moment résultant des forces élastiques exercées sur la partie GL du solide par la partie située de l'autre côté du plan $A'A''$.

20. Répartition inégale des forces élastiques longitudinales. — Pour soumettre au calcul les forces élastiques, nous considérons le corps dont il s'agit comme composé, dans le voisinage du plan $A'A''$, de files de molécules, dites *fibres*, qui dans l'état primitif du solide étaient perpendiculaires à ce plan $A'A''$, et nous les imaginons coupées par un plan $B'B''$ infiniment voisin, contenant toutes les molécules qui avant la déformation se trouvaient dans une tranche parallèle à $A'A''$, comme la figure l'indique en $b'b''$, tandis que le plan $B'B''$ rencontre le plan $A'A''$ et le plan $b'b''$ suivant les droites projetées en C et en o . Il en résulte qu'en général certaines fibres, telles que Aa devenue AB , se sont raccourcies, et d'autres, telles que la fibre A_1a_1 devenue A_1B_1 , se sont allongées, tandis que les fibres situées dans le plan Co ont conservé leur longueur, et sont pour cette raison appelées *fibres neutres*. Toutes ces fibres ne sont pas restées exactement normales au plan $A'A''$, puisqu'elles subissent des efforts transversaux dont la somme est ΣP_y . Mais on a vu, par ce qui a lieu dans le cas de la torsion (17), que la déviation transversale, exprimée par $\tan \alpha$,

n'a qu'une très-petite valeur (environ 0,001 pour le fer et la fonte), pourvu que, comme nous le supposons, la limite de l'élasticité ne soit pas dépassée. En conséquence, nous admettons que les composantes normales des forces élastiques qui s'exercent en $A'A''$ suivent la même loi que si les fibres traversant ce plan lui étaient exactement perpendiculaires.

Si donc nous considérons dans le plan $A'A''$, un élément superficiel $d\omega$ comprenant le point A' , à cet élément répond une force élastique normale qui, en vertu de la loi de l'élasticité

(nos 5 et 9), est exprimée en valeur absolue par $E d\omega \frac{bB}{Ab}$ et ré-

pulsive (dans le sens des x positifs), bB étant un raccourcissement; nous désignons cette force par $R d\omega$, de sorte que R est la *pression longitudinale rapportée à l'unité de surface*, au point A . Posons donc

$$R d\omega = E d\omega \frac{bB}{Ab}$$

ou

$$R = E \frac{bB}{Gh}.$$

A un élément superficiel autour du point A , pris entre O et G répond une force attractive, négative, $-E d\omega \frac{b_1 B_1}{Gh}$, parce que $b_1 B_1$ est un allongement.

Cherchons à remplacer dans l'expression de R le rapport $\frac{bB}{Gh}$ dont les deux termes sont infiniment petits, et dont l'antécédent varie avec la position du point A , par un autre rapport en termes finis, qui ne contienne qu'une variable dépendante de cette position. Cette variable sera la distance GA du point A à l'axe projeté en G , et nous la désignons par v , réservant la lettre y pour l'ordonnée d'un point quelconque de la courbe GL . D'ailleurs le sens positif des v est le même que celui des y .

Appelons V la distance GO des fibres neutres au même axe. La similitude des triangles Bbo et Hho donne

$$bB = hH \cdot \frac{AO}{GO} = hH \cdot \frac{v - V}{V};$$

ainsi

$$R = E \cdot \frac{hH}{Gh} \frac{v - V}{V}.$$

Or, $\frac{hH}{Gh}$ est l'allongement proportionnel ou par unité de longueur de la fibre passant par le centre de gravité G , et dite *fibre moyenne*. Désignons cet allongement par i , et l'équation précédente devient

$$R = Ei \frac{v - V}{V}; \quad [6]$$

de sorte que la force élastique longitudinale par unité de surface au point A se trouve exprimée en fonction des deux quantités géométriques qui caractérisent la déformation de la pièce à partir de la section AA' : l'une i est l'allongement proportionnel de la fibre moyenne, qui ferait trouver le point H si l'on se donnait Gh égal à Oo ; l'autre V est la distance GO ou ho déterminant le point o , ce qui permettrait d'achever la figure.

On remarquera que la dernière équation est applicable, eu égard aux signes, à toutes les fibres qui traversent le plan $A'A''$. Pour $v = V$ on a $R = 0$; pour $v < V$ positif ou négatif, R est négative, c'est-à-dire que la force élastique agit suivant les x négatifs; c'est une tension proprement dite. C'est le contraire lorsque v est $> V$, comme pour la fibre AB de la figure; elle est soumise à une pression. Si l'on fait $v = 0$, on retrouve $R = -Ei$, c'est-à-dire que la tension de la fibre moyenne GH est Ei .

Proposons-nous maintenant d'exprimer R en fonction des forces qui produisent la déformation; et pour cela introduisons l'expression des forces élastiques normales dans les équations d'équilibre de la portion $A'A''L$; nous obtenons, en étendant à toute la surface $A'A''$ les intégrales indiquées ci-après, et observant que $\int v d\omega = 0$, puisque G est le centre de gravité de $A'A''$:

1° Equation de projections :

$$\Sigma P_x + \int R d\omega = 0,$$

ou

$$N = Ei \int d\omega - \frac{Ei}{V} \int v d\omega = Ei\Omega; \quad [7]$$

2° Equation de moments (lorsque comme au point A la force $Rd\omega$ est positive, c'est-à-dire dans le sens des x positifs, et que la distance v est dans le sens des x positifs, le moment de cette force autour de l'axe projeté en G est négatif).

$$\Sigma M_G P - \int R v d\omega = 0$$

ou

$$\mu = \frac{Ei}{V} \int v^2 d\omega - Ei \int v d\omega = \frac{EiI}{V}. \quad [8]$$

On représente ici par I le moment d'inertie $\int v^2 d\omega$ de la surface $A'A''$ autour de l'axe projeté en G , c'est-à-dire mené dans le plan $A'A''$ par le centre de gravité perpendiculairement au plan de flexion.

Des équations [6], [7] et [8] on tire trois formules, générales en égard aux signes :

$$i = \frac{N}{E\Omega}, \quad V = \frac{IN}{\Omega\mu} \quad \text{et} \quad R = \frac{v\mu}{I} - \frac{N}{\Omega}. \quad [9]$$

21. Valeur moyenne et valeurs extrêmes de la force élastique longitudinale. — La première et la troisième de ces équations, quand dans celle-ci on fait $v = a$, prouvent que l'allongement et la tension de la fibre moyenne GH sont les mêmes que si les forces P se réduisaient à une seule égale à ΣP_x ou N et dirigée suivant cette fibre. Les deux quantités i et R au point G changent de signe quand ΣP_x est négative, et signifient alors raccourcissement et pression.

En donnant à v ses deux valeurs extrêmes $-v'$ pour le point A' le plus éloigné de l'axe G du côté négatif, et v'' pour le point analogue A'' du côté positif, on aura les valeurs extrêmes de R , savoir :

$$R' = -\left(\frac{v'\mu}{I} + \frac{N}{\Omega}\right) \quad \text{et} \quad R'' = \frac{v''\mu}{I} - \frac{N}{\Omega}.$$

Suivant les signes et les valeurs du moment fléchissant μ et de la tension longitudinale N , chacune des quantités R' et R'' peut être positive, exprimer une *pression*, ou être négative, exprimer une *tension*.

22. Courbure de la fibre moyenne. — Les plans A'A'' et B'B'' étant approximativement normaux à la fibre moyenne GH, le point C est le centre de courbure de cette fibre fléchie. D'après la figure on a, en appelant ρ le rayon de courbure GC,

$$\frac{GC}{GH} = \frac{ah}{hH}, \quad \text{ou} \quad \frac{\rho}{(1+i)Gh} = \frac{V}{i \cdot Gh};$$

d'où, en négligeant i auprès de 1, et tirant $\frac{V}{i}$ de l'équation de moments [8],

$$\rho = \frac{V}{i} = \frac{EI}{\mu}. \quad [10]$$

23. La quantité EI qui, multipliée par $\frac{1}{\rho}$, mesure de la courbure ou de la flexion, donne le moment fléchissant μ , égal et opposé au moment résultant des forces élastiques, se trouve souvent dans les formules. On la désigne pour abrégé par la lettre ϵ , et c'est improprement qu'on l'a appelée *moment de flexion*, puisqu'elle est égale au produit d'un moment par une longueur, ou d'une force par une surface.

Son inverse $\frac{1}{\epsilon}$ ou $\frac{1}{EI}$ pourrait plus à propos s'appeler *coefficient ou module de flexibilité*, car plus il est grand, plus, pour un moment fléchissant donné, la courbure est grande.

24. *Fibre moyenne fléchie circulairement.* — Il résulte de la formule $\rho = \frac{EI}{\mu} = \frac{\epsilon}{\mu}$ que si le solide est exactement prismatique, dans son état naturel, entre deux sections $A'A''$ et $B'B''$ séparées par une distance finie ; si dans cet intervalle il n'est soumis à aucune force ; si, enfin, les forces qui le sollicitent depuis $B'B''$ jusqu'à l'extrémité L sont équivalentes à un couple $(P, -P)$; dans ce cas, ϵ et μ étant des constantes pour tous les points de la fibre moyenne entre $A'A''$ et $B'B''$, il en est de même de ρ . Cette portion de fibre est donc fléchie circulairement.

25. *Equation dérivée de la ligne moyenne.* — En prenant $y = f(x)$ pour l'équation de la fibre ou ligne moyenne GL d'un solide prismatique, fléchi par des forces, mais naturellement droite quand ces forces n'agissent pas, on remarque que si l'axe des x est choisi de manière qu'en un des points de la courbe l'inclinaison $\frac{dy}{dx}$ (ou $f'(x)$) sur cet axe soit petite comparativement à l'unité, il en sera de même pour tout autre point de cette courbe dans les cas auxquels s'applique ordinai-

rement l'équation [10]. On peut alors approximativement poser

$$\rho = \frac{1}{f''(x)} \quad \text{au lieu de}$$

$$\rho = \frac{\{1 + [f'(x)]^2\}^{\frac{3}{2}}}{f''(x)} \quad (*)$$

On obtient ainsi

$$EI f''(x) = \Sigma \mathcal{M}_a P, \quad \text{ou} \quad \varepsilon f''(x) = \mu; \quad [11]$$

de sorte que si, pour toute la courbe GL, on a en fonction de x la somme des moments, autour d'un point quelconque de cette courbe, des forces extérieures qui agissent depuis ce point jusqu'à l'extrémité L inclusivement, et si ε est constant, ou plus généralement une fonction de x variant peu (car la pièce doit être approximativement prismatique), il est possible de déterminer par intégration la courbe qu'affecte la suite des centres de gravité des sections transversales du solide fléchi.

(*) La relation $\rho = \frac{1}{f''(x)}$ applicable au cas où l'inclinaison $f'(x)$ est petite, peut aisément se démontrer *à priori*. Soient sur la courbe deux points infiniment rapprochés M, M', dont la distance ds a la projection sur l'axe des x égale à dx . Soient α et $\alpha + d\alpha$ les angles que les tangentes en M et M' font avec le même axe. $d\alpha$ est par conséquent l'angle que font entre elles ces deux tangentes. C'est aussi l'angle MCM' des deux normales en M et M'. La distance MM' est le rayon de courbure ρ , et l'on a $\rho = \frac{ds}{d\alpha}$.

Or l'angle α étant petit peut être remplacé par sa tangente trigonométrique. On a donc

$$\alpha = f'(x), \quad \text{d'où} \quad d\alpha = f''(x) dx;$$

par conséquent

$$\rho = \frac{ds}{f''(x) dx} \quad \text{ou} \quad \rho = \frac{1}{f''(x)},$$

attendu que le rapport $\frac{dx}{ds}$ égal à $\cos \alpha$ ne diffère pas sensiblement de l'unité.

26. Cas particulier, forces transversales. — Lorsque les forces P ont une résultante parallèle à $A'A''$, ou bien lorsque ces forces équivalent à un couple, les formules [9] deviennent, à cause de $\Sigma P_x = 0$,

$$i = 0, \quad V = 0, \quad \text{et} \quad R = \frac{v\mu}{I} \quad [12]$$

La surface des fibres neutres passe alors par les centres de gravité des sections transversales $A'A''$ $B'B''$. Si le moment fléchissant μ est positif, il y a pression et contraction du côté des v positifs, tension et allongement du côté opposé.

Du reste, les formules [6] et [7] subsistent sans changement dans ce cas.

Les nombreux exemples qu'on rencontre dans la pratique de pièces prismatiques sollicitées par des forces perpendiculaires à leur ligne moyenne, nous engagent à démontrer directement les importantes propriétés exprimées dans cette hypothèse, par les équations [10], [11] et [12].

Considérons (fig. 3) la fibre AB qui, étant comprimée, reçoit en A sur sa base $d\omega$ une pression représentée par $Rd\omega$, de sorte que R est au point A la pression par unité de surface exercée sur la partie du solide située à droite de $A'A''$ par la partie du même solide située à gauche. En vertu de la loi de l'élasticité (5) nous posons, d'après la figure, vu la similitude des triangles $Bb\omega$, $O\omega C$, et les égalités $A\omega = O\omega$, $b\omega = AO$,

$$R = E \frac{Bb}{Ab} = E \frac{AO}{OC}.$$

R est variable avec AO , tandis que E et OC sont des constantes. Représentons AO par z , et l'équation

$$Rd\omega = \frac{E}{OC} z d\omega \quad [13]$$

sera applicable à tout élément $d\omega$ pris dans la section $A'A''$, pourvu qu'on prenne z positif ou négatif, selon que cet élément superficiel sera au-dessous de O ou au-dessus, et pourvu que, dans ce dernier cas, il soit entendu que R devenant négatif, exprime une tension ou force agissant de droite à gauche.

Cela posé, toutes les forces élastiques $Rd\omega$, les unes positives, les autres négatives, doivent, avec les forces de même nature parallèles au plan $A'A''$ et avec les forces P , satisfaire aux conditions d'équilibre.

La première et la plus simple de ces conditions s'exprime par

$$\int Rd\omega = \Sigma P_x.$$

Or $\Sigma P_x = 0$, puisque les forces P ont leur résultante parallèle à $A'A''$ ou équivalent à un couple. Mettons pour $Rd\omega$ son expression [13]; il vient

$$\frac{E}{OC} \int zd\omega = 0, \quad \text{d'où} \quad \int zd\omega = 0.$$

Donc l'axe projeté en O , qui traverse les fibres neutres, contient le centre de gravité G de la section $A'A''$, comme nous l'ont montré les équations $i = 0$, $V = 0$. Les points O et G se confondant, OC est le rayon de courbure ρ de la fibre moyenne; les distances désignées tout à l'heure par z sont celles que nous avons précédemment représentées par v , et l'équation [13] peut s'écrire ainsi

$$Rd\omega = \frac{E}{\rho} vd\omega. \quad [14]$$

La deuxième condition d'équilibre à laquelle doivent satisfaire les mêmes forces est l'équation des moments autour d'un axe. En prenant pour cet axe celui qui se projette en G , et

en mettant pour la variable $Rd\omega$ cette dernière expression, on a

$$\Sigma \mathcal{N}_a P = \int R d\omega \cdot v, \quad \text{ou} \quad \mu = \frac{E}{\rho} \int v^2 d\omega = \frac{EI}{\rho}.$$

Enfin, de cette relation identique avec la formule [10] et de l'équation [14], on conclut

$$R = \frac{v\mu}{I},$$

qui est la troisième des équations [12].

§ 4.

FORMULES DES MOMENTS D'INERTIE DE DIVERSES SURFACES PLANES.

27. Parallélogramme dont un côté est parallèle à l'axe *Intégr. à deux en deux.*
du moment d'inertie (fig. 4).

$$I = \int_{-\frac{1}{2}c}^{\frac{1}{2}c} v^2 b dv = \frac{1}{12} bc^3 = \frac{1}{12} c^2 \Omega.$$

28. Rectangle évidé symétriquement (fig. 5). — Le moment d'inertie est dans ce cas la différence de deux autres calculés par la formule précédente :

$$I = \frac{1}{12} (bc^3 - b'c'^3).$$

29. Parallélogramme dont une diagonale est l'axe du moment d'inertie (fig. 6).

$$I = 2 \int_0^h v^2 \left(b - \frac{bv}{h} \right) dv = \frac{1}{6} bh^3 = \frac{1}{6} h^2 \Omega.$$

30. Section droite d'un cylindre ou d'un tuyau cylindrique. — Soient (fig. 7) deux axes Ou , Ov , La figure étant la même par rapport à chacun d'eux, on a

$$I = \int v^2 d\omega \quad \text{et} \quad I = \int u^2 d\omega,$$

d'où

$$I = \frac{1}{2} \int (u^2 + v^2) d\omega = \frac{1}{2} \int r^2 d\omega,$$

en appelant r la distance au centre O d'un élément superficiel quelconque $d\omega$. Ainsi le moment d'inertie autour de O est la moitié du moment d'inertie polaire de la même surface autour de l'axe perpendiculaire projeté au centre O . Supposant que le cercle soit plein et son rayon r' , on a

$$\int r^2 d\omega = \int_0^{r'} 2\pi r dr \cdot r^2 = \frac{1}{2} \pi r'^4 = \frac{1}{2} r'^2 \Omega,$$

donc

$$I = \frac{1}{4} \pi r'^4 = \frac{1}{4} r'^2 \Omega.$$

Si la surface est la section d'un tuyau dont les rayons soient r' et r'' , on a

$$I = \frac{1}{4} \pi (r'^4 - r''^4) = \frac{1}{4} (r'^2 + r''^2) \Omega.$$

31. Ellipse pleine dont un des diamètres principaux est l'axe du moment d'inertie. — En comparant l'ellipse dont les diamètres principaux sont $2a$ et $2b$ à un cercle dont le diamètre serait $2b$, on voit que les deux surfaces peuvent être décomposées en un même nombre de petits rectangles de même hauteur deux à deux et dont les bases sont dans le rapport de a à b . Donc (27) il en est de même des moments d'inertie, et l'on a (30)

$$I = \frac{1}{4} \pi b^4 \cdot \frac{a}{b} = \frac{1}{4} \pi a b^3$$

ou

$$I = \frac{1}{4} b^3 \Omega.$$

59. Triangle dont un côté est parallèle à l'axe du moment d'inertie. — Les moments d'inertie qui entrent dans les formules du paragraphe 3 sont pris autour de droites passant par le centre de gravité des sections transversales. Lorsque celles-ci sont symétriques par rapport à l'axe des moments, il suffit de ne considérer que la moitié de la surface située d'un côté de cet axe, et de doubler le résultat. Dans d'autres cas, il peut être commode de prendre d'abord le moment d'inertie autour d'un axe ne passant pas par le centre de gravité, et parallèle à celui qui y passe.

On connaît ou l'on retrouve facilement la relation qui lie deux moments d'inertie d'un même corps ou d'une même surface autour de deux axes parallèles, dont l'un passe par le centre de gravité. Soit $d\omega$ un élément superficiel, v sa distance à un axe mené par le centre de gravité, y sa distance à un autre axe parallèle, a la distance des deux axes entre eux : on a

$$y^2 = (v \pm a)^2 \quad \text{et} \quad \int y^2 d\omega = \int v^2 d\omega + a^2 \Omega,$$

à cause de

$$\int v d\omega = 0.$$

Appliquons cette propriété au moment d'inertie du triangle proposé (fig. 8) autour de l'axe Ax parallèle à la base b et passant au sommet : on a

$$\int y^2 d\omega = \int_0^h y^2 \frac{by}{h} dy = \frac{1}{4} bh^3,$$

donc autour de Gx

$$I = \frac{1}{4} bh^3 - \frac{bh}{2} \left(\frac{2}{3} h \right)^2 = \frac{1}{36} bh^3 = \frac{1}{18} h^3 \Omega.$$

33. Surface plane quelconque (fig. 9). — Soit une surface **KLMN** terminée par deux droites **KN**, **LM** parallèles à l'axe **Ax** du moment d'inertie, et par deux courbes **KL**, **ML**. Soit désignée par u la longueur d'une corde **PQ** parallèle à **Ax** et par v sa distance à cet axe. On a

$$I = \int_k^{k+l} v^2 u dv.$$

Pour avoir la valeur approximative de cette intégrale, on divise la distance l en un nombre pair n de parties égales ; on mène, par les points de division, des cordes parallèles à l'axe qui, en y comprenant **KN** et **LM**, seront désignées par $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n$; on désigne par δ la distance $\frac{l}{n}$ de deux parallèles consécutives, et l'on pose d'après la formule de Th. Simpson,

$$I = \frac{\delta}{3} [k^2 u_0 + 4(k+\delta)^2 u_1 + 2(k+2\delta)^2 u_2 + 4(k+3\delta)^2 u_3 + \dots \\ + 4(k+l-\delta)^2 u_{n-1} + (k+l)^2 u_n].$$

Quand les courbes **KL** et **MN** sont peu accidentées, il suffit de faire $n=4$. Les parallèles u_0 et u_n peuvent être nulles.

Passons aux diverses questions qu'on peut résoudre à l'aide des théorèmes du paragraphe 3, suivant la situation des forces et suivant la figure du corps sur lequel elles agissent.

§ 5.

CAS SIMPLES DE LA FLEXION PLANE D'UNE PIÈCE NATURELLEMENT PRISMATIQUE SOUS L'ACTION DE FORCES TRANSVERSALES.

34. Prisme bécchi par deux forces distinctes et une charge uniformément répartie. — Traitons d'abord, pour plus de clarté, une question peu compliquée. Un solide naturellement prismatique (fig. 10) a, dans l'état de flexion de sa partie comprise entre M_0 et l'extrémité M_1 , sa fibre moyenne suivant la courbe $M_0 M_1 M_2$ qui fait au point donné M_0 avec l'horizon un petit angle dont la tangente trigonométrique est donnée α_0 ; il est sollicité en M_1 et à l'extrémité M_2 par deux forces verticales P_1, P_2 . Il subit en outre sur sa longueur $M_0 M_2$, représentée par a une charge uniformément répartie désignée par pa , de sorte que p est la charge uniforme par mètre de longueur. On connaît le moment d'inertie I et le produit EI ou e constant dans toute l'étendue de la pièce. On rapporte la courbe $M_0 M_1 M_2$ à deux axes, l'un horizontal, M_0x , l'autre vertical, M_0y , et l'on demande pour un point quelconque M dont on donne l'abscisse x : 1° Quel est l'effort tranchant dans la section faite en ce point;

2° Quelle est la pression longitudinale R positive ou négative, c'est-à-dire la pression proprement dite ou la tension en un point désigné de cette section;

3° Quelle est l'inclinaison sur l'axe M_0x de la courbe $M_0 M_1 M_2$ au point M ;

4° Quelle est l'ordonnée y du même point.

35. Efforts tranchants. — D'après la définition donnée au numéro 19, si le point M est pris entre M_0 et M_1 , l'effort tranchant est $P_1 + P_2 + p(a - x)$; pour un point situé entre M_1 et M_2 , il serait $P + p(a - x)$. Pour une section faite tout près, mais avant le point M_1 (à gauche de ce point dans la figure), l'effort tranchant suivant la section transversale serait

$$P_1 + P_2 + p(a - l);$$

tout près et au delà de M_1 , il serait $P_2 + p(a - l)$.

36. Pressions longitudinales. — Dans le cas actuel de forces toutes transversales, la fibre moyenne est aussi fibre neutre (26). D'après la formule [12], la pression pour une distance v à la fibre moyenne dépend du moment fléchissant qui, suivant sa définition (19), a ici pour valeur, si le point M est entre M_0 et M_1 ,

$$\mu = P_1(l - x) + P_2(a - x) + \frac{1}{2} p(a - x)^2; \quad [15]$$

si le point M était entre M_1 et M_2 , on aurait seulement

$$\mu = P_2(a - x) + \frac{1}{2} p(a - x)^2. \quad [16]$$

Le moment μ étant ainsi facilement trouvé, quelle que soit la valeur de x , on en conclura la pression en tout point désigné de la section, par la formule précitée $R = \frac{v\mu}{I}$. Si les forces P_1 , P_2 et p sont de même sens, sens adopté pour positif, μ l'est aussi. Les fibres situées au-dessus de la fibre moyenne, côté des v négatifs, sont tendues et allongées; celles qui sont au-dessous sont pressées et comprimées. La plus grande tension répond à la plus grande distance v' du côté négatif; elle

est donc $\frac{v'\mu}{I}$. La plus grande pression répond à la plus grande distance v'' du côté positif, elle est $\frac{v''\mu}{I}$.

Si les forces P_1 , P_2 et p ne sont pas toutes de même sens, le signe variable de μ fait connaître le sens de la flexion au point variable M , et la formule $R = \frac{v\mu}{I}$ reste applicable eu égard aux signes de μ et de v . En mettant pour v ses deux valeurs extrêmes $-v'$ pour les points situés au-dessus de la couche des fibres neutres, et v'' pour ceux qui sont au-dessous, on trouve toujours pour R deux valeurs de signes contraires : l'une positive, signifiant pression ; l'autre négative, signifiant tension. Si l'une des courbes, M_0 , M_1 , M_2 , a un point d'inflexion, on en trouvera l'abscisse en posant pour cette courbe $\mu = 0$, et cherchant la valeur de x autre que $x = 0$ et $x = a$ qui satisfait à cette condition.

En tout point, extrême ou intermédiaire, où $\mu = 0$, il n'y a pour toute la section ni pression ni tension longitudinale ; la courbure est nulle et le mot *inflexion* signifie *non-flexion*.

37. Inclinaisons de la fibre moyenne. — Remplaçons μ par $\epsilon f''(x)$ dans l'équation [15] ; nous avons pour un point quelconque entre M_0 et M_1 ,

$$\epsilon f''(x) = \frac{1}{2}p(a^2 - 2ax + x^2) + P_1(l - x) + P_2(a - x),$$

d'où en multipliant par dx et en intégrant, eu égard à la condition que, pour $x = 0$, $f'(x)$ devienne α_0 ,

$$\begin{aligned} \epsilon [f'(x) - \alpha_0] = & \frac{1}{2}p \left(a^2x - ax^2 + \frac{x^3}{3} \right) \\ & + P_1 \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) + P_2 \left(ax - \frac{x^2}{2} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Pour les divers points de la courbe M_1M_2 , l'équation des moments se réduit à

$$\varepsilon f_1'(x) = \frac{1}{2} p (a^2 - 2ax + x^2) + P_2(a - x).$$

Multiplions par dx , et intégrons en déterminant les constantes de manière que les deux courbes M_0M_1 , M_1M_2 aient la même tangente en M_1 , de sorte que pour $x = l$, $f_1'(x)$ devienne égale à $f'(x)$. Pour cela le procédé le plus rapide est de mettre au premier membre de la nouvelle équation la même constante $-\Sigma\alpha_0$ qu'à l'équation [17]; puis on complète le second membre par la constante $P_1 \frac{l^2}{2}$ égale à ce que devient $P_1 \left(lx - \frac{x^2}{2} \right)$ de l'équation [17], quand on fait $x = l$. Nous avons ainsi de M_1 à M_2

$$\varepsilon [f_1'(x) - \alpha_0] = \frac{1}{2} p \left(a^2x - ax^2 + \frac{x^3}{3} \right) + P_1 \frac{l^2}{2} + P_2 \left(ax - \frac{x^2}{2} \right). \quad [18]$$

Les équations [17] et [18] résolvent la troisième question. Si la fibre moyenne après s'être abaissée se relève, ou l'inverse, on trouvera l'abscisse du maximum ou du minimum de l'ordonnée en posant $f'(x)$, dont la racine devra être comprise entre 0 et l ou $f_1'(x) = 0$, dont la racine devra l'être entre l et a .

38. Ordonnées de la fibre moyenne. — Multiplions les équations [17] et [18] par dx , et intégrons la première à partir de l'origine M_0 , où l'on a simultanément $x = 0$ et $f(x) = 0$, la seconde à partir de M_1 et par conséquent en déterminant la constante de manière que pour $x = l$ les deux valeurs de $f(x)$ et

de $r_1(x)$ deviennent égales. Remplaçons d'ailleurs la notation $r(x)$ par y , il vient entre M_0 et M_1 ,

$$\varepsilon(y - \alpha_0 x) = \frac{1}{2} p \left(\frac{a^2 x^2}{2} - \frac{ax^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right) + P_1 \left(l \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + P_2 \left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right). \quad [19]$$

entre M_1 et M_2 ,

$$\varepsilon(y - \alpha_0 x) = \frac{1}{2} p \left(\frac{a^2 x^2}{2} - \frac{ax^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right) + P_1 \frac{l^2 x}{2} + P_1 \frac{l^3}{3} + P_2 \left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right). \quad [20]$$

C'est la réponse à la quatrième question. Si, par exemple, on veut connaître l'ordonnée y_2 du point M_2 , il faut faire dans la dernière équation $x = a$. Il vient

$$\varepsilon(y_2 - \alpha_0 a) = \frac{1}{8} p a^4 + \frac{1}{6} P_1 l^3 (3a - l) + \frac{1}{3} P_2 a^3. \quad [21]$$

Remarque. — Si y_2 était donnée, cette équation servirait à déterminer l'une des autres quantités qu'elle contient, supposée inconnue.

Nous allons montrer par divers exemples l'usage qu'on peut faire des formules qui précèdent.

39. Cas particulier (*) (fig. 11). — La tangente en M_0 est

(*) Il sera fort profitable à l'instruction des lecteurs de résoudre directement les questions traitées aux numéros 39 et suivants comme cas particuliers, et de faire des applications numériques des formules, pour diverses formes de la section transversale et pour diverses natures de matériaux.

horizontale; les forces se réduisent à une charge uniformément répartie pa , et à un poids distinct P appliqué à l'extrémité L . Ainsi $\alpha_0 = 0$, $P_1 = 0$, $P_2 = P$.

Moments fléchissants. — L'équation des moments [15] se réduit à

$$\mu = \frac{1}{2}p(a-x)^2 + P(a-x),$$

qu'on trouverait immédiatement et qu'on peut écrire plus simplement en comptant les distances horizontales x' à partir de L vers M_0

$$\mu = \frac{1}{2}px'^2 + Px'.$$

Si P est positif comme p , la plus grande valeur de μ est en M_0 où $x' = a$. C'est donc $\mu_0 = \left(\frac{1}{2}pa + P\right)a$, ce qui prouve que quant à l'état de tension et de flexion de la pièce prismatique en M_0 et par conséquent quant au danger de dépasser la limite d'élasticité, la charge répartie pa produit le même effet que si elle était réunie au milieu de M_0L , ou que si, réduite à moitié, elle était appliquée à l'extrémité L .

Si la force P est négative et que la lettre Q désigne sa valeur absolue, l'équation précédente devient

$$\mu = \frac{1}{2}px'^2 - Qx' = \frac{1}{2}px' \left(x' - \frac{2Q}{p}\right).$$

La valeur de μ est donc représentée par l'ordonnée d'une parabole dont le *minimum* algébrique est $-\frac{Q^2}{2p}$, répondant à $x' = \frac{Q}{p}$. Tant que x' est $< \frac{2Q}{p}$, μ est négatif, la courbe

tourne sa concavité dans le sens de Q . Si a est assez grand pour que x' devienne $> \frac{2Q}{p}$, le moment μ est alors positif, et au point où $x' = \frac{2Q}{p}$ la courbe a une inflexion. Dans ce cas la plus grande valeur absolue de μ est la plus grande des deux quantités

$$\frac{Q^2}{2p} \text{ et } \frac{1}{2} pa^2 - Qa.$$

Ordonnée finale. — La valeur de y_2 , quand on fait, dans l'équation [21], $\alpha_0 = 0$, $P_1 = 0$, $P_2 = P$, devient

$$y_2 = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{1}{8} pa^4 + \frac{1}{3} Pa^3 \right) = \frac{a^3}{3\varepsilon} \left(\frac{3}{8} pa + P \right). \quad [22]$$

Ainsi la partie de y_2 due à la charge pa uniformément répartie n'est que les $\frac{3}{8}$ de ce qu'elle serait si cette même charge était réunie à l'extrémité L.

40. Prisme reposant librement sur deux appuis de niveau (fig. 12). — A et A' sont les points d'appui qui sont supposés n'exercer que des réactions verticales. De A en A' agit une charge uniformément répartie pa ; en B s'exerce en outre la force distincte P . La statique fait connaître immédiatement les réactions, savoir :

$$\text{en A, } \frac{1}{2} pa + P \frac{l'}{a}.$$

$$\text{en A', } \frac{1}{2} pa + P \frac{l}{a}.$$

L'inclinaison α_0 au point A pris pour origine n'est pas don-

née, mais elle se trouverait déterminée par l'équation [21] dans laquelle on ferait $y_1 = 0$, $P_1 = P$ et $P_2 = -\left(\frac{1}{2}pa + P\frac{l}{a}\right)$; on peut dès lors résoudre toutes les questions indiquées aux numéros 34 et suivants.

D'ailleurs la connaissance de α_0 n'est pas nécessaire pour calculer les efforts tranchants, et le moment μ d'où l'on conclut les pressions longitudinales. Pour un point M situé entre A et B, en appelant x la distance AM et prenant le sens ascendant pour le sens positif des forces, on remarque que la somme des moments autour de M des forces qui agissent depuis ce point M jusqu'à A' inclusivement est égale, à cause de l'équilibre, à la somme des moments, autour du même point, mais en sens contraire, des forces qui agissent depuis A inclusivement jusqu'à M. On obtient ainsi immédiatement

$$\mu = \left(\frac{1}{2}pa + \frac{Pl'}{a}\right)x - \frac{1}{2}px^2 = \frac{1}{2}px \left(a + \frac{2Pl'}{pa} - x\right).$$

Cette quantité est proportionnelle à l'ordonnée d'une parabole dont l'axe principal serait perpendiculaire aux x , ou bien au carré de l'ordonnée répondant à l'abscisse x dans un cercle dont le diamètre égal à $a + \frac{2Pl'}{pa}$ aurait son origine en A.

Donc si l est $< \frac{1}{2}a + \frac{Pl'}{pa}$, la plus grande valeur de μ sur la partie AB a lieu au point B. Si $l > \frac{1}{2}a + \frac{Pl'}{pa}$, le maximum de μ répond à $x = \frac{1}{2}a + \frac{Pl'}{pa}$.

On aura donc, en choisissant $l > l'$, la plus grande valeur de μ , savoir : dans la première hypothèse,

$$\mu = \frac{l'}{a} \left(P + \frac{1}{2}pa\right),$$

et dans la deuxième,

$$\mu = \frac{1}{2} p \left(\frac{1}{2} a + \frac{Pl'}{pa} \right)^2.$$

Les *inclinaisons et ordonnées* aux divers points seraient données par [17], [18], [19] et [20].

Dans le cas plus particulier où le point B est le milieu de AA', les réactions des appuis sont toutes deux $\frac{1}{2}(pa + P)$; le plus grand moment fléchissant a lieu au milieu B et a pour valeur $\frac{1}{4} a \left(P + \frac{1}{2} pa \right)$; la courbe est horizontale en ce même point, et l'on obtient pour la flèche f , en mettant, dans l'expression de y , du numéro 39, $\frac{1}{2} a$ au lieu de a , $-p$ au lieu de p , et $\frac{1}{2}(P + pa)$ au lieu de P ,

$$f = \frac{a^3}{48EI} \left(P + \frac{5}{8} pa \right).$$

Donc, quant à la production de la flèche, la charge pa uniformément répartie équivaut à une force $\frac{5}{8} pa$ appliquée au milieu B.

41. Prisme encastré en un point M_0 et reposant à l'extrémité L sur un appui (fig. 13). — On suppose que la partie de prisme M_0M_1L soit assujettie en M_0 à une inclinaison connue α_0 à l'horizon; qu'au point L dont l'ordonnée y , est connue, ce corps repose sur un appui qui n'exerce qu'une réaction verticale; qu'au point M_1 il soit sollicité par la force verticale P ; qu'enfin dans l'intervalle M_0L égal à a , il supporte une charge uniformément répartie pa . On pose les mêmes questions qu'au numéro 34.

Suivant la remarque du numéro 38, l'équation [21] dans laquelle on connaît $y_2 - \alpha_0 \alpha$, distance verticale du point L au prolongement de la tangente en M_0 , prolongée, sert à déterminer la réaction inconnue P_2 de l'appui. En la représentant par $-Q$, et faisant $P_1 = P$, on trouve

$$Q = \frac{l^2 (3a - l)}{2a^3} P + \frac{3}{8} pa - \frac{3s (y_2 - \alpha_0 a)}{a^3}, \quad [23]$$

et cette valeur substituée à $-P_2$ dans les diverses équations du numéro 38. résoudra les questions proposées.

42. Cas particulier du numéro précédent. — Le point d'appui L est sur le prolongement de la tangente en M_0 , et l'on néglige auprès de P la charge uniformément répartie. Ainsi

$$y_2 - \alpha_0 a = 0 \quad \text{et} \quad p = 0.$$

Donc

$$Q = \frac{l^2 (3a - l)}{2a^3} P.$$

L'équation des moments [16] devient $\mu = -Q(a - x)$, ce qui montre que de M_1 en L la courbe est concave vers le haut, et que sa courbure diminue de valeur absolue depuis M_1 jusqu'à L où elle est nulle.

L'équation [15] peut s'écrire ainsi :

$$\mu = Pl - Qa - (P - Q)x.$$

Cette fonction étant du premier degré a toutes ses valeurs comprises entre les deux extrêmes, savoir : pour

$$x = 0, \quad \mu_0 = Pl - Qa \quad \text{et, pour} \quad x = l, \quad \mu_1 = -Q(a - l).$$

La deuxième est évidemment négative. La première est posi-

tive (ce qu'on vérifierait directement en y mettant pour Q sa valeur), sans quoi la courbe, partout concave vers le haut, ne pourrait passer en M_1 .

Le point le plus bas de la courbe est au point dont l'abscisse rend $f'(x)$ nulle dans l'une ou l'autre des équations [17 et [18].

43. Cas encore plus particulier. — En outre des conditions précédentes M_1 est le milieu de M_0L ; ainsi $l = \frac{1}{2}a$. On trouve

$$Q = \frac{5}{16}P, \quad \mu_0 = Pl - Qa = \frac{3}{16}Pa, \quad \mu_1 = -Q(a-l) = -\frac{5}{32}Pa.$$

Le plus grand moment fléchissant est donc en M_0 et a pour valeur $\frac{3}{16}Pa$. L'équation [18] où l'on fait $r_1(x) = 0$ fait con-

naître, eu égard aux données et à la valeur de $Q = \frac{5}{16}P$,

l'abscisse du point le plus bas de la courbe $x = a\left(1 - \sqrt{\frac{1}{5}}\right)$,

et ces valeurs de Q et de x substituées dans l'équation [19] donnent l'ordonnée du même point ou la flèche qui est

$$f = \frac{1}{48} \sqrt{\frac{1}{5}} \frac{Pa^3}{EI} = \frac{0,45}{48} \frac{Pa^3}{EI},$$

tandis que si la pièce était librement posée aux deux bouts, la

flèche (34) serait $\frac{1}{48} \frac{Pa^3}{EI}$.

44. Autre cas particulier du numéro 41. — Le point d'appui L est encore sur la tangente en M_0 prolongée; entre ces deux points la pièce n'est soumise qu'à la charge répartie pa . Ainsi

$$y - \alpha_0 a = 0 \quad \text{et} \quad \bar{P} = 0.$$

La formule [23] donne $Q = \frac{3}{8} pa$ et l'équation [15] devient pour toute la courbe

$$\mu = \frac{1}{2} p (a - x) \left(\frac{1}{4} a - x \right), \quad [24]$$

μ se réduit à zéro par $x = a$ et par $x = \frac{1}{4} a$, qui correspond au point d'inflexion.

Le maximum de courbure entre le point d'inflexion et l'extrémité simplement appuyée L s'obtient en égalant à zéro la dérivée de μ , savoir :

$$-\frac{1}{4} a + x - a + x = 0; \text{ d'où } x = \frac{5}{8} a \text{ et } \mu = \frac{9}{128} pa^2.$$

A partir de l'extrémité M_0 jusqu'au point d'inflexion, μ et la courbure diminuent; la plus grande valeur obtenue en faisant $x = 0$ dans [24], est

$$\mu_0 = \frac{1}{8} pa^2 = \frac{16}{128} pa^2,$$

et excède le maximum analytique ci-dessus trouvé qui a lieu au delà du point d'inflexion.

Lorsque la pièce est simplement posée à ses deux extrémités (40), le maximum de μ est également $\frac{1}{8} pa^2$; mais il a lieu au milieu de la pièce.

Le point le plus bas de la courbe, quand la tangente M_0L est horizontale, s'obtient en faisant, dans l'équation [17],

$$r'(x) = 0, \quad \alpha_0 = 0, \quad P_1 = 0, \quad P_2 = -\frac{3}{8} pa;$$

on supprime le facteur x qui répond au point M_0 ; on a

$$x^2 - \frac{15}{8}ax + \frac{3}{4}a^2 = 0; \text{ d'où } x = 0,578a.$$

En substituant cette valeur dans l'équation [19], on trouve pour la flèche f

$$EIf = 0,0067 pa \cdot a^3,$$

tandis que, si la pièce est librement posée aux deux bouts (40), on a

$$\frac{EIf}{pa \cdot a^3} = \frac{5}{384} = 0,013.$$

L'hypothèse théorique d'un encastrement horizontal serait pratiquement réalisée par une poutre prismatique reposant sur trois appuis de niveau, équidistants, et chargée uniformément dans les deux intervalles. En désignant chacun d'eux par a , et la charge totale par $2a$, on verra facilement que la réaction de chaque appui extrême étant $\frac{3}{8}pa$, celle de l'appui du milieu est $\frac{10}{8}pa$ ou $\frac{5}{8}$ de la charge totale.

45. Voici maintenant un cas qui n'est pas, comme les précédents, immédiatement compris dans le problème du numéro 34, et dont la solution exige un complément de méthode.

Portion de prisme encastrée à ses extrémités (fig. 14). — Cette portion, dont la ligne moyenne fléchie est $M_0M_1M_2$, est assujettie à former des angles donnés à l'horizon, aux points M_0 et M_2 qui ont une petite différence de niveau, et où sont des appuis qui, à gauche de M_0 et à droite de M_2 , n'exercent que des forces verticales, les unes ascendantes, les autres descendantes. Au point M_1 agit une force verticale P_1 , et dans la longueur a de M_0 à M_2 s'exerce une charge pa uniformément répartie. On propose les mêmes questions qu'au numéro 34.

Concevons une section transversale faite très-près et à gauche du point M_2 . La partie du solide qui reste au delà, à droite de cette section, exerce sur le solide M_0M_1 , situé à gauche, des forces qui se réduisent à un effort tranchant vertical Q et à un couple également inconnu dont nous représentons le moment par μ_2 . C'est une conséquence de ce que, par hypothèse, les appuis n'exercent sur le prisme que des forces verticales. De même la partie du solide située à gauche d'une section faite près et à droite du point M_0 exerce sur la partie M_0M_1 un effort tranchant Q_0 , et des forces longitudinales équivalentes à un couple $-\mu_0$. La statique ne nous donne que deux équations entre les quatre inconnues Q_0 , Q , μ_0 et μ_2 , savoir :

$$Q + Q_0 - P - pa = 0,$$

et

$$\mu_2 - \mu_0 + Pl_1 + \frac{1}{2}pa^2 - Qa = 0.$$

La théorie de l'élasticité doit en fournir deux autres.

En imitant la marche suivie aux numéros 37 et 38, avec cette différence qu'on a égard au moment μ_2 , on a pour un point M de la courbe M_0M_1 l'équation des moments ci-après et ses conséquences obtenues par deux intégrations successives :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon f''(x) &= \frac{1}{2}p(a-x)^2 + P(l_1-x) - Q(a-x) + \mu_2, \\ \varepsilon [f'(x) - \alpha_0] &= \frac{1}{2}p \left(a^2x - ax^2 + \frac{x^3}{3} \right) + P \left(l_1x - \frac{x^2}{2} \right) \\ &\quad - Q \left(ax - \frac{x^2}{2} \right) + \mu_2x, \\ \varepsilon (y - \alpha_0x) &= \frac{1}{2}p \left(\frac{a^3x^2}{2} - \frac{ax^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right) + P \left(\frac{l_1x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \\ &\quad - Q \left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + \mu_2 \frac{x^2}{2}. \end{aligned} \right\} [25]$$

Pour un point de la courbe M_1M_2 , on a de même, eu égard à la tangente commune,

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon f_1''(x) &= \frac{1}{2} p (a-x)^2 - Q (a-x) + \mu_2, \\ \varepsilon [f_1'(x) - \alpha_0] &= \frac{1}{2} p \left(a^2 x - ax^2 + \frac{x^3}{3} \right) + \frac{Pl_1^2}{2} \\ &\quad - Q \left(ax - \frac{x^2}{2} \right) + \mu_2 x, \\ \varepsilon [y - \alpha_0 x] &= \frac{1}{2} p \left(\frac{a^2 x^2}{2} - \frac{ax^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right) + \frac{Plx_1^2}{2} - \frac{Pl_1^2}{6} \\ &\quad - Q \left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + \mu_2 \frac{x^2}{2}. \end{aligned} \right\} [26]$$

Les deux dernières équations doivent être vérifiées par $x = a$, $f_1'(x) = -\beta$ et $y = y_2$, en appelant β l'inclinaison à l'horizon de la tangente en M_2 menée dans le sens des x négatifs. Ainsi

$$\left. \begin{aligned} -\varepsilon (\alpha_0 + \beta) &= \frac{1}{6} pa^3 + P \frac{l_1^2}{2} - Q \frac{a^2}{2} + \mu_2 a, \\ \varepsilon (y_2 - \alpha_0 a) &= \frac{1}{8} pa^4 + P \frac{l_1^2}{2} \left(a - \frac{l_1}{3} \right) - Q \frac{a^3}{3} + \mu_2 \frac{a^2}{2}, \end{aligned} \right\} [27]$$

deux équations du premier degré pour deux inconnues Q et μ_2 . Ces quantités étant déterminées, leur substitution dans les équations [25] et [26] servira à trouver le moment fléchissant, l'inclinaison et l'ordonnée en un point quelconque.

46. Cas particulier. — Pour simplifier les calculs, nous supposons les encastresments horizontaux, les appuis de niveau,

et nous faisons abstraction du poids ou de la charge répartie. Ainsi $\alpha_0 = 0$, $\beta = 0$, $y_2 = 0$ et $p = 0$. Les équations (27) donnent alors

$$Q = P \frac{l_1^3 (3a - 2l_1)}{a^3} \quad \text{et} \quad \mu_2 = P \frac{l_1^3 (a - l_1)}{a^2} = P \frac{l_1^3 l_2}{a^2}.$$

La première des équations [25] se réduit au premier degré en x par $p = 0$; il s'ensuit que de M_0 à M_1 , le plus grand moment est à l'un de ces deux points. En faisant $x = l_1$ dans cette équation et en y substituant les valeurs précédentes de Q et de μ_2 , on a le moment fléchissant en M_1 ,

$$\mu_1 = \frac{2Pl_1^3 l_2}{a^3}.$$

D'ailleurs, en remplaçant l_1 par l_2 et *vice versa* dans l'expression de μ_2 , on a celle de μ_0 en M_0 ,

$$\mu_0 = \frac{Pl_1 l_2^3}{a^3}.$$

Donc les trois moments μ_0 , μ_1 , μ_2 sont entre eux comme $\frac{1}{l_1}$, $\frac{2}{a}$ et $\frac{1}{l_2}$.

47. Cas plus particulier. — Mêmes hypothèses et de plus M_1 est le milieu de M_0M_2 . Ainsi $l_1 = \frac{1}{2}a$. On a, en appelant f la flèche, déduite de la troisième des équations [25],

$$\mu_0 = \mu_1 = \mu_2 = \frac{1}{8}Pa, \quad Q = \frac{1}{2}P \quad \text{et} \quad EIf = \frac{1}{24}P \left(\frac{a}{2}\right)^3;$$

tandis que si la pièce était simplement posée, on aurait, en faisant $p = 0$ dans la dernière formule du numéro 40,

$$EIf = \frac{1}{6} P \left(\frac{a}{2} \right)^3.$$

Entre M_0 et M_1 est un point d'inflexion où $\mu = 0$ et $x = \frac{1}{4}a$.

48. Autre cas particulier. — On suppose encore les encastres horizontaux et les appuis de niveau, mais on fait $P = 0$, les charges se réduisant à la force pa uniformément répartie. Les équations [27] deviennent

$$0 = pa^2 - 3Qa + 6\mu^2, \quad \text{et} \quad 0 = 3pa^2 - 8Qa + 12\mu_1,$$

d'où

$$Q = \frac{1}{2} pa \quad \text{et} \quad \mu_1 = \frac{1}{12} pa^2.$$

La première équation [25] devient

$$\mu = \frac{1}{2} p \left(\frac{1}{6} a^2 - ax + x^2 \right).$$

On en conclut qu'au milieu de la pièce, on a

$$\mu = -\frac{1}{24} pa^2 = -\frac{1}{2} \mu_1.$$

C'est donc aux points M_0 et M_1 qu'a lieu la plus grande valeur absolue du moment fléchissant.

Entre chaque extrémité et le milieu, il y a une inflexion qu'on obtient en faisant $\mu = 0$; d'où

$$x = \frac{1}{2} a \left(1 - \sqrt{\frac{1}{3}} \right) = 0,211a.$$

En faisant $\alpha_0 = 0$, $P = 0$, $Q = \frac{1}{2} Pa$, $\mu_1 = \frac{1}{12} pa^2$ et $x = \frac{1}{2} a$ dans la troisième équation [25], on a pour la flèche f la relation

$$EIf = \frac{1}{24} p \left(\frac{a}{2} \right)^4, \text{ au lieu de } EIf = \frac{5}{24} p \left(\frac{a}{2} \right)^4,$$

qu'on trouverait si la pièce était simplement posée (40).

49. Remarque. — Bien que dans les questions précédentes nous n'ayons supposé qu'une force distincte intermédiaire P ou P_1 , on comprend que la méthode indiquée s'appliquerait sans difficulté, avec des calculs plus étendus, à un nombre quelconque de forces transversales. Mais nous allons généraliser la question en supposant que le solide, dont la fibre moyenne est naturellement droite, est formée de parties prismatiques dans lesquelles la quantité EI ou ϵ est constante pour chacune de ces parties, mais variable de l'une à l'autre, et en supposant en outre que ces parties supportent des charges réparties dont l'intensité par unité de longueur est variable d'une partie à l'autre, quoique constante pour chacune d'elles.

§ 6.

GÉNÉRALISATION DES QUESTIONS PRÉCÉDENTES SUR LES PRISMES CHARGÉS TRANSVERSEMENT.

50. Questions à résoudre. — Soit (fig. 15) $M_0M_1 \dots M_n$ la fibre moyenne d'une portion du solide, fléchie sous l'action de forces qu'on peut, pour fixer les idées, supposer toutes verticales, mais d'ailleurs descendantes ou ascendantes. Dans chacun des n intervalles $M_0M_1, M_1M_2, \dots, M_{n-1}M_n$ dont les longueurs sont l_1, l_2, \dots, l_n , ce solide est prismatique, et le produit EI prend successivement les valeurs $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$. Aux points M_1, M_2, \dots, M_{n-1} s'exercent les forces P_1, P_2, \dots, P_{n-1} . Dans les n intervalles $M_0M_1, M_1M_2, \dots, M_{n-1}M_n$, agissent des forces uniformément réparties, ayant les valeurs $p_1l_1, p_2l_2, \dots, p_nl_n$. Au delà du point M_n agissent des forces verticales Q, Q', \dots , d'où il résulte que la partie du solide située à gauche (eu égard à la position de la figure) d'une section transversale passant par le point M_n reçoit, des molécules voisines appartenant à la partie située à droite, des forces élastiques qui sont équivalentes : 1° à un effort tranchant T_n égal à la résultante de translation des forces Q, Q', \dots transportée dans cette section, et 2° à un couple dont le moment μ_n est égal à la somme des moments des mêmes forces Q, Q', \dots autour de l'axe projeté en M_n . Réciproquement la partie du solide située à droite du point M_n reçoit des molécules voisines qui appartiennent à la partie située à gauche, des forces élastiques égales et contraires à celles dont nous venons de parler, et qui se réduisent à un effort tranchant

— T_n égal et opposé à T_n et à un couple dont le moment — μ_n est égal et opposé de sens à μ_n . De même sur la partie située à gauche de M_0 agissent des forces Q_0, Q_0, \dots en équilibre avec les forces élastiques exercées par les molécules voisines appartenant à la partie située à droite, lesquelles se réduisent : 1° à un effort tranchant T_0 égal à la résultante de translation de toutes les forces extérieures qui agissent depuis M_0 jusqu'à l'extrémité L , et 2° à un couple dont le moment μ_0 est égal à la somme des moments des mêmes forces autour de l'axe projeté en M_0 ; et réciproquement la partie du solide située à droite du point M_0 subit, de la part des molécules voisines appartenant à celle qui est à gauche, des forces élastiques qui équivalent à un effort tranchant — T_0 et à un couple dont le moment est — μ_0 .

En général, M étant un point quelconque de la fibre moyenne, il s'exerce entre les molécules voisines, à droite et à gauche d'un plan transversal passant par ce point, des forces mutuelles égales et opposées : la partie située à gauche reçoit de celle qui est à droite des forces réductibles à un effort tranchant que nous désignons par T et à un couple dont le moment, appelé moment fléchissant, est désigné par μ . Nous choisissons pour le sens positif de T le sens descendant qui est aussi celui des forces $P_1, P_2, \dots, P_1, P_2, \dots$; le sens positif du moment μ est de droite à gauche par en bas. La partie située à droite du plan transversal en M reçoit de l'autre des forces équivalentes à un effort tranchant — T et à un couple dont le moment est — μ .

Cela posé, nous allons rechercher les relations qui lient les diverses quantités qu'il peut être utile de considérer dans le solide depuis le point M_0 jusqu'au point M_n , savoir : les longueurs l_1, l_2, \dots , les quantités $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots$, les forces extérieures $P_1, P_2, \dots, P_1, P_2, \dots$, les efforts tranchants, les moments fléchissants, les inclinaisons de la fibre moyenne, et les coordonnées de ses différents points.

§1. Efforts tranchants. — Si le point M est supposé entre

M_0 et M_1 , et si l'on désigne par x la distance M_0M , en considérant la partie du solide comprise entre les deux plans transversaux passant par M et M_n , on voit que les forces extérieures sous l'action desquelles cette partie est en équilibre sont : les deux couples extrêmes dont les moments sont $-\mu$ et μ_n , et les forces parallèles

$$-T, P_1, P_2, P_3, \dots, P_{n-1}, T_n, p_1(l_1 - x), p_2l_2, p_3l_3, \dots, p_nl_n.$$

L'une des équations d'équilibre consiste en ce que la somme algébrique de ces forces parallèles est nulle. Il serait très-facile d'obtenir une équation analogue pour le cas où le point M serait dans un autre intervalle.

Si à droite et à gauche du point M on imagine deux plans transversaux infiniment voisins, les efforts tranchants que subit la tranche infiniment mince qu'ils comprennent, de la part des deux autres parties du solide, sont égaux et de sens contraires, parce qu'après de ces forces finies disparaît la force infiniment petite due à la charge répartie d'une manière continue; mais il n'en est pas de même d'une tranche comprise entre deux plans voisins du point M_1 , l'un à droite, l'autre à gauche. Outre l'effort tranchant T_1 du côté droit et l'effort tranchant $-T'$ du côté gauche, la tranche subit encore la force P_1 ; il faut donc pour l'équilibre qu'on ait l'équation

$$T_1 + P_1 - T' = 0. \quad [28]$$

Cela entendu, cherchons les relations qui existent entre les efforts tranchants extrêmes T_0 et T_n , et les efforts tranchants T_1, T_2, \dots, T_{n-1} qui ont lieu à droite des points M_1, M_2, \dots, M_{n-1} .

La partie du solide comprise entre un plan passant en M_0 ou très-près de M_0 , et un plan très-près et à droite de M_1 , est en équilibre sous l'action de forces extérieures qui se réduisent aux deux couples $-\mu_0$ et μ_1 , et aux forces verticales $-T_0, T_1, p_1l_1$ et P_1 . On a donc

$$T_1 + p_1l_1 + P_1 - T_0 = 0,$$

d'où

$$T_0 - T_1 = p_1 l_1 + P_1.$$

On a de même pour les intervalles suivants, en augmentant successivement, les indices d'une unité :

$$T_1 - T_2 = p_2 l_2 + P_2,$$

.....,

$$T_{n-2} - T_{n-1} = p_{n-1} l_{n-1} + P_{n-1},$$

$$T_{n-1} - T_n = p_n l_n,$$

[29]

n équations entre les $n + 1$ efforts tranchants au delà et près des points $M_0, M_1, M_2, \dots, M_n$.

Quant à l'effort tranchant T au point M entre M_0 et M_1 , on trouve par la considération de l'équilibre de la partie comprise entre M et le plan transversal situé près et au delà de M_0 , en appelant x la distance M_0M , l'équation

$$T = T_0 - px, \quad [30]$$

formule applicable aux autres intervalles en augmentant les indices et appelant toujours x la distance du point considéré à l'extrémité gauche de l'intervalle où il se trouve.

52. Moments fléchissants. — Soient désignés par $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$, les moments fléchissants qui correspondent aux points $M_0, M_1, M_2, \dots, M_n$.

Considérons, comme ci-dessus, la portion de solide fléchi comprise entre un plan transversal passant en M_0 ou près de M_0 et un plan passant en M_1 ou très près de M_1 , et posons l'équation des moments autour de l'axe projeté en M_1 de toutes les forces extérieures précédemment énumérées, en remarquant :
1° que, quel que soit l'axe perpendiculaire au plan de flexion,

les couples ont toujours les mêmes moments ; 2° que la résultante des forces dont la somme est $p_1 l_1$ passe au milieu de $M_0 M_1$; 3° que les moments des forces T_1 et P_1 sont nuls autour de M_1 .

Cette équation est

$$\mu_1 - \mu_0 + T_0 l_1 - \frac{1}{2} p_1 l_1^2 = 0,$$

d'où

$$\mu_0 - \mu_1 = T_0 l_1 - \frac{1}{2} p_1 l_1^2.$$

On a de même, pour les intervalles suivants :

$$\mu_1 - \mu_2 = T_1 l_2 - \frac{1}{2} p_2 l_2^2,$$

.....

$$\mu_{n-2} - \mu_{n-1} = T_{n-2} l_{n-1} - \frac{1}{2} p_{n-1} l_{n-1}^2,$$

$$\mu_{n-1} - \mu_n = T_{n-1} l_n - \frac{1}{2} p_n l_n^2,$$

[31]

n équations entre les $n+1$ moments fléchissants qui correspondent aux points $M_0, M_1, M_2, \dots, M_n$.

μ étant le moment fléchissant qui correspond à un point quelconque M , supposons ce point entre M_0 et M_1 ; posons $M_0 M = x$, et faisons pour la portion de prisme comprise entre M_0 et M , ce que nous avons fait pour la portion $M_0 M_1$, en prenant les moments autour de l'axe projeté en M des forces qui la sollicitent ; nous avons ainsi

$$\mu - \mu_0 + T_0 x - \frac{1}{2} p_1 x^2 = 0. \quad [32]$$

μ étant calculé d'après cette équation pour la section passant

par M , on aura, par la formule [12], la force élastique longitudinale R , au point de cette section dont la distance à l'axe M est v .

53. L'effort tranchant est exprimé par la dérivée relative à l'abscisse x du moment fléchissant changé de signe. — La comparaison des formules [30] et [32] donne lieu à une remarque utile : c'est qu'il en résulte la relation

$$T = - \frac{d\mu}{dx}.$$

Il est facile de la démontrer directement. Si l'on appelle a la distance, à l'origine des x , d'une quelconque des forces transversales P qui agissent au delà du point M , dont l'abscisse est x , on a

$$\Sigma C_x P = P(a - x),$$

et par conséquent

$$\mu = \Sigma P a - x \Sigma P,$$

d'où (19)

$$\frac{d\mu}{dx} = -\Sigma P = -T.$$

54. Inclinaisons de la fibre moyenne sur l'axe Ox . — Remplaçons μ par sa valeur $EIt''(x)$ que nous représentons par $\epsilon_1 t''(x)$, en supposant, comme nous l'avons dit, que le produit ϵ_1 soit constant dans l'intervalle $M_0 M_1$. Multiplions l'équation [32] par dx et intégrons depuis $x = 0$ jusqu'à x quelconque, mais moindre que l_1 . Nous obtenons en appelant α_0 la tangente de l'angle que fait avec Ox la fibre moyenne en M_0 ,

$$\epsilon_1 [t'(x) - \alpha_0] = \mu_0 x - T_0 \frac{x^2}{2} + p_1 \frac{x^3}{6}. \quad [33]$$

Il est clair que l'on aurait une équation pareille pour un point situé dans l'un quelconque des intervalles M_1M_2 , M_2M_3 , ..., $M_{n-1}M_n$, l'inclinaison $f'(x)$ dépendant de celle qui a lieu à l'extrémité gauche de cet intervalle.

Soient α_1 , α_2 , α_3 , ..., les inclinaisons correspondantes aux points M_1 , M_2 , M_3 , En faisant, dans l'équation [33], $x = l_1$, nous aurons

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_0 &= \frac{1}{\varepsilon_1} \left(\mu_0 l_1 - \frac{1}{2} T_0 l_1^2 + \frac{1}{6} p_1 l_1^3 \right), \\ \text{et de même pour les intervalles suivants, en augmentant} \\ &\text{successivement les indices d'une unité,} \\ \alpha_2 - \alpha_1 &= \frac{1}{\varepsilon_2} \left(\mu_1 l_2 - \frac{1}{2} T_1 l_2^2 + \frac{1}{6} p_2 l_2^3 \right), \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_n - \alpha_{n-1} &= \frac{1}{\varepsilon_n} \left(\mu_{n-1} l_n - \frac{1}{2} T_{n-1} l_n^2 + \frac{1}{6} p_n l_n^3 \right), \end{aligned} \right\} [34]$$

n équations entre les $n+1$ inclinaisons α_0 , α_1 , ..., α_n .

55. Ordonnées de la fibre moyenne. — Multiplions l'équation [33] par dx et intégrons depuis $x=0$ jusqu'à x quelconque moindre que l_1 . Nous obtenons en remplaçant $f(x)$ par y et appelant y_0 l'ordonnée de M_0 ,

$$\varepsilon_1 (y - y_0) = \varepsilon_1 \alpha_0 x + \frac{1}{2} \mu_0 x^2 - \frac{1}{6} T_0 x^3 + \frac{1}{24} p_1 x^4. \quad [35]$$

On aurait une équation pareille pour un point situé dans l'un quelconque des intervalles M_1M_2 , M_2M_3 , ..., $M_{n-1}M_n$; de sorte que l'ordonnée y dépend de celle qui a lieu à la première extrémité de cet intervalle.

Soient y_1, y_2, \dots, y_n , les ordonnées des points M_1, M_2, \dots, M_n .
En faisant $x = l_1$ dans l'équation [35], on a

$$\left. \begin{aligned} y_1 - y_0 &= \alpha_0 l_1 + \frac{1}{\varepsilon_1} \left(\frac{1}{2} \mu_0 l_1^2 - \frac{1}{6} T_0 l_1^3 + \frac{1}{24} p_1 l_1^4 \right), \\ \text{et de même pour les intervalles suivants, en augmen-} \\ \text{tant successivement les indices d'une unité,} \\ y_2 - y_1 &= \alpha_1 l_2 + \frac{1}{\varepsilon_2} \left(\frac{1}{2} \mu_1 l_2^2 - \frac{1}{6} T_1 l_2^3 + \frac{1}{24} p_2 l_2^4 \right), \\ \dots\dots\dots \\ y_n - y_{n-1} &= \alpha_{n-1} l_n + \frac{1}{\varepsilon_n} \left(\frac{1}{2} \mu_{n-1} l_n^2 - \frac{1}{6} T_{n-1} l_n^3 + \frac{1}{24} p_n l_n^4 \right). \end{aligned} \right\} [36]$$

On a ainsi n équations entre les $n + 1$ ordonnées $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$.

§6. Récapitulation des formules précédentes. — Les équations de [29] à [36] renferment $8n + 8$ quantités dont les unes peuvent être connues et les autres inconnues, savoir :

$n + 1$ longueurs.....	$l_1, l_2, \dots, l_n, x,$	}	$n + 1$ équ. [29] et [30],
n produits El	$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n,$		
$n - 1$ forces distinctes.....	$P_1, P_2, \dots, P_{n-1},$		
n valeurs des forces réparties..	$p_1, p_2, \dots, p_n,$		
$n + 2$ efforts tranchants aux points M_0, M_1 et M_n et au delà des points M_1, M_2, \dots, M_{n-1} ...	$T_0, T_1, T_2, \dots, T_n, T,$	}	$n + 1$ » [31] et [32], $n + 1$ » [33] et [34], $n + 1$ » [35] et [36],
$n + 2$ moments.....	$\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \mu_n,$		
$n + 2$ inclinaisons.....	$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_1,$		
$n + 2$ ordonnées.....	$y_0, y_1, y_2, \dots, y_n, y,$		
$8n + 8$ quantités.			$4n + 4$ équations.

Ainsi lorsque $4n + 4$ de ces quantités seront données on pourra en général calculer les $4n + 4$ autres.

Nous allons indiquer l'application de ces généralités à quelques cas spéciaux.

57. Premier cas. — *Solide assujéti en un point M_0 à une inclinaison donnée α_0 , et sollicité depuis M_0 exclusivement jusqu'à l'extrémité L , par des forces données $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, T_n, p_1 l_1, p_2 l_2, \dots, p_n l_n$.*

Les données sont ici : $n + 1$ longueurs l_1, l_2, \dots, l_n, x ; les n quantités $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$; n forces $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, T_n$; n charges par mètre p_1, p_2, \dots, p_n ; une ordonnée y_0 ; une inclinaison α_0 et le moment final $\mu_n = 0$.

Les équations [29] donneront les n efforts tranchants T_0, T_1, \dots, T_{n-1} ;

Les équations [34], les n moments fléchissants $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{n-1}$;

Les équations [34], les n inclinaisons $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$;

Les équations [36], les n ordonnées y_1, y_2, \dots, y_n .

Enfin les équations [30], [32], [33] et [35] donneront les quantités T, μ, α et y répondant à une abscisse x prise à volonté dans l'un des intervalles.

58. Deuxième cas. — *Solide assujéti en un point M_0 (fig. 16) à une inclinaison donnée α_0 , appuyé de là à son extrémité L en un certain nombre de points dont les ordonnées sont connues, et les réactions verticales, mais inconnues. Entre les appuis le solide est sollicité par des forces distinctes données, telles que $P_1, P_2, P_3, P_4, \dots$, et dans les intervalles $M_0 M_1, M_1 M_2, M_2 M_3, \dots$, des points d'application des forces distinctes connues ou des réactions inconnues, agissent les forces réparties $p_1 l_1, p_2 l_2, \dots$.*

Ce cas diffère du précédent en ce qu'il y a un certain nombre des forces P qui sont inconnues, mais remplacées dans les données par les ordonnées de leurs points d'application. On a

donc encore pour trouver les $4n + 4$ inconnues, $4n + 4$ équations du premier degré, comme au premier cas.

59. Troisième cas. Solide assujéti en deux points donnés M_0, M_n , à des inclinaisons connues α_0 et α_n , et sollicité d'ailleurs par des forces données $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, p_1 l_1, p_2 l_2, \dots, p_n l_n$.

La différence entre ce cas et le premier est que la force T_n et le moment μ_n sont inconnus et remplacés comme quantités données par l'inclinaison α_n et l'ordonnée y_n .

Les équations [29], [31], [34] et [36] suffisent donc pour déterminer ces inconnues. Les équations [29] donneraient les inconnues T_0, T_1, \dots, T_{n-1} en fonction de l'inconnue T_n . Par suite les équations [31] donneraient les moments inconnus $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{n-1}$ en fonctions de T_n et de μ_n . Les équations [34] procureraient donc en d'autres fonctions de ces inconnues les inclinaisons $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ et une équation du premier degré entre α_n connue et les inconnues T_n et μ_n . Enfin la substitution des expressions obtenues dans les équations [36] et l'élimination, par addition, des ordonnées inconnues y_1, y_2, \dots, y_{n-1} produiraient une seconde équation du premier degré entre les mêmes inconnues. Celles-ci étant calculées, on se retrouverait dans le premier cas, avec cette seule différence que μ_n ne serait pas nul, mais connu.

60. Quatrième cas. Solide simplement posé sur un nombre quelconque d'appuis, sollicité entre ces points par des forces distinctes P_1, P_2, P_3, \dots et dans les intervalles soit entre ces forces, soit entre elles et les appuis, par les forces $p_1 l_1, p_2 l_2, \dots$ uniformément réparties.

Ce cas ne diffère du second qu'en ce que le moment μ_0 est nul et par conséquent donné, tandis que l'inclinaison α_0 est inconnue. Le nombre des inconnues reste donc le même et les questions qu'on peut se proposer sont encore des problèmes déterminés du premier degré.

61. Cas particulier du problème précédent. — *Solide posé en un nombre $n + 1$ de points M_0, M_1, \dots, M_n , sur des appuis qui n'exercent que des réactions verticales inconnues Q_0, Q_1, \dots, Q_n , et chargé dans les intervalles l_1, l_2, \dots, l_n , de forces uniformément réparties $p_1 l_1, p_2 l_2, \dots, p_n l_n$.*

Les généralités établies précédemment aux numéros 51 à 55 sont ici applicables, et nous en conservons les notations, avec cette seule différence que les forces P_1, P_2, \dots, P_{n-1} qui toutes sont les réactions inconnues des appuis intermédiaires, sont remplacées avec changement de signe par Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-1} . Les données de ce cas, en y comprenant l'abscisse x d'un point M dans une travée quelconque, sont : $n + 1$ longueurs l_1, l_2, \dots, l_n, x ; les n valeurs de ϵ constantes dans chaque travée et désignées par $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$; les n valeurs des charges par mètre p_1, p_2, \dots, p_n ; les $n + 1$ ordonnées des points d'appui; enfin les deux moments extrêmes μ_0, μ_n qui sont nuls; en tout $4n + 4$ données, nombre nécessaire comme on l'a vu (53). Nous allons indiquer la marche convenable pour la détermination des inconnues.

62. Recherche des moments fléchissants $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}$. — Cette recherche sera nécessairement fondée sur ce que les points d'appui ont certaines différences de niveau et qu'en ces points les courbes consécutives sont tangentes. Sans supposer d'abord que μ_0 soit nul, proposons-nous de trouver les relations qui lient les deux moments fléchissants μ_0 et μ_1 , et les deux inclinaisons α_0 et α_1 , quatre quantités qui se rapportent aux deux appuis consécutifs M_0 et M_1 . Pour cela, posons l'équation des moments [32] autour de M ,

$$\mu - \mu_0 + T_0 x - \frac{p_1 x^2}{2} = 0$$

et pour éliminer T_0 remarquons de nouveau que par $x = l_1$ et

$\mu = \mu_1$, cette équation devient

$$\mu_1 - \mu_0 + T_0 l_1 - \frac{1}{2} p_1 l_1^2 = 0.$$

De là, en éliminant T_0 et en remplaçant μ par $\varepsilon_1 f''(x)$, on conclut

$$\mu = \varepsilon_1 f''(x) = \frac{p_1 x^2}{2} - \left(\frac{p_1 l_1^2}{2} + \mu_0 - \mu_1 \right) \frac{x}{l_1} + \mu_0; \quad [37]$$

et par deux intégrations successives, en supposant l'origine des x et des y en M_0 ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 [f'(x) - \alpha_0] = \frac{p_1 x^2}{6} - \left(\frac{p_1 l_1^2}{2} + \mu_0 - \mu_1 \right) \frac{x^2}{2l_1} + \mu_0 x, \\ \varepsilon_1 (y - \alpha_0 x) = \frac{p_1 x^4}{24} - \left(\frac{p_1 l_1^2}{2} + \mu_0 - \mu_1 \right) \frac{x^3}{6l_1} + \frac{1}{2} \mu_0 x^2. \end{array} \right.$$

En faisant dans ces deux dernières équations $x = l_1$, et $y = y_1$, coordonnées du point M_1 , on a

$$\left\{ \begin{array}{l} 24 \varepsilon_1 (\alpha_1 - \alpha_0) = -2 p_1 l_1^2 + 12 l_1 \mu_0 + 12 l_1 \mu_1, \\ 24 \varepsilon_1 \left(\frac{y_1}{l_1} - \alpha_0 \right) = -p_1 l_1^2 + 8 l_1 \mu_0 + 4 l_1 \mu_1. \end{array} \right. \quad [38]$$

Telles sont les deux relations cherchées.

63. Relation entre les moments fléchissants sur trois appuis consécutifs et les différences de niveau de ces points.

— Il s'agit d'éliminer les inclinaisons α_0 et α_1 . D'abord des équations [38] on déduit pour éliminer α_0 ,

$$24 \varepsilon_1 \alpha_1 = -p_1 l_1^2 + 4 l_1 \mu_0 + 8 l_1 \mu_1 + 24 \varepsilon_1 \frac{y_1}{l_1}.$$

Ensuite on remarque que pour l'intervalle suivant M_1M_2 on aura des équations toutes pareilles aux équations [38], qui s'obtiennent en augmentant tous les indices d'une unité, et en appelant y_2 la différence de niveau de l'appui M_2 , au-dessous du point M_1 . La seconde des équations [38] sera donc remplacée par celle que voici :

$$24\varepsilon_2\alpha_1 = p_2l_2^3 - 8l_2\mu_1 - 4l_2\mu_2 + 24\varepsilon_2\frac{y_2}{l_2}.$$

Éliminons α_1 en égalant les deux expressions de $24\alpha_1$; il viendra

$$4\frac{l_1}{\varepsilon_1}\mu_0 + 8\left(\frac{l_1}{\varepsilon_1} + \frac{l_2}{\varepsilon_2}\right)\mu_1 + 4\frac{l_2}{\varepsilon_2}\mu_2 = \frac{p_1l_1^3}{\varepsilon_1} + \frac{p_2l_2^3}{\varepsilon_2} - 24\left(\frac{y_1}{l_1} - \frac{y_2}{l_2}\right) [39]$$

relation entre les moments μ_0, μ_1, μ_2 sur trois appuis consécutifs, et les différences de niveau y_1 et y_2 .

Formule de M. Clapeyron. — Dans le cas particulier où l'on suppose que la pièce est exactement prismatique dans l'étendue des deux travées, et que les trois appuis M_0, M_1 et M_2 sont en ligne droite, l'équation précédente devient

$$4l_1\mu_0 + 8(l_1 + l_2)\mu_1 + 4l_2\mu_2 = p_1l_1^3 + p_2l_2^3, \quad [40]$$

formule très-simple, que M. Clapeyron a signalée le premier.

Quel que soit le nombre n des intervalles ou travées, en augmentant successivement les indices d'une unité, on aura en tout $n - 1$ équations semblables à l'équation [39] comprise dans ce nombre. Il suffira donc en général que deux des $n + 1$ moments $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n$ soient donnés (par exemple qu'on ait suivant l'énoncé $\mu_0 = 0$ et $\mu_n = 0$), pour qu'on puisse calculer les moments inconnus.

Les moments sur les appuis étant calculés, la formule [37] qu'on appliquera à une travée quelconque, en augmentant les

indices d'un même nombre entier, donnera les valeurs des moments correspondants à divers points déterminés par leur abscisse x , c'est-à-dire par leur distance à l'origine de la travée. μ étant une fonction du second degré en x , aura ses différences secondes égales, si on prend les points équidistants.

64. Calcul des inclinaisons, des ordonnées et des efforts tranchants. — Connaissant les moments $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots$, on calculera les inclinaisons $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ par les formules analogues à la deuxième des équations [38]. Puis, on obtiendra les inclinaisons et les ordonnées en des points quelconques répondant à diverses distances x par les deux équations établies comme conséquences et à la suite de l'équation [37].

On trouvera aussi, en fonctions de $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots$, les efforts tranchants $T_0, T_1, T_2, \dots, T_{n-1}$ par les formules [31], puis l'effort tranchant T quelconque par la formule [30]. On trouvera T positif, descendant, lorsque la partie de gauche de la poutre terminée au point M , tendra à soulever ou empêchera de descendre la partie de droite; T sera négatif dans le cas contraire; par exemple tout près du second appui M_1 où $x = l_1$, donnera $T = T_0 - p_1 l_1$, c'est précisément T'_1 suivant la signification de cette notation (§1).

65. Calcul des réactions des appuis. — Ces forces ascendantes étant désignées par $Q_0, Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-1}$ et Q_n , la première est évidemment égale à T_0 , et les autres seront données par les formules [2] du numéro 52² devenues

$$T_0 - T_1 - p_1 l_1 + Q_1 = 0,$$

$$T_1 - T_2 - p_2 l_2 + Q_2 = 0,$$

.....

$$T_{n-2} - T_{n-1} - p_{n-1} l_{n-1} + Q_{n-1} = 0,$$

$$T_{n-1} - p_n l_n + Q_n = 0.$$

66. Applications. Deux travées égales, également chargées. Les trois appuis de niveau. — En faisant dans l'équation [40] : $l_1 = l_2 = a$, $p_1 = p_2 = p$, $\mu_0 = \mu_3 = 0$, on trouve

$$\mu_1 = \frac{pa^2}{8}.$$

L'équilibre de la première travée donne [34]

$$Q_0 a - \frac{pa^2}{2} + \mu_1 = 0, \quad [41]$$

d'où
$$Q_0 = \frac{3pa}{8},$$

et par suite
$$Q_1 = 2pa - 2Q_0 = \frac{5pa}{4},$$

résultats conformes à ce qui a été obtenu autrement [44].

67. Deux travées égales, également chargées. L'appui intermédiaire plus bas que les deux autres supposés de niveau. — La différence y_2 est égale et de signe contraire à y_1 . La formule [39] où l'on fait

$$l_1 = l_2 = a, \quad p_1 = p_2 = p, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon, \quad y_2 = -y_1, \quad \mu_0 = \mu_3 = 0,$$

devient
$$\mu_1 = \frac{pa^2}{8} - \frac{3\varepsilon y_1}{a^2} \quad [42]$$

et combinée avec l'équation [41], donne

$$Q_0 = \frac{3pa}{8} + \frac{3\varepsilon y_1}{a^3}$$

et par suite

$$Q_1 = 2pa - 2Q_0 = \frac{5pa}{4} - \frac{6\epsilon y_1}{a^3}.$$

Ainsi l'on peut calculer de combien la charge de l'appui intermédiaire diminue, à mesure que son niveau s'abaisse.

Cherchons, en fonction de y_1 , ou, ce qui revient au même, en fonction de Q_0 , la plus grande valeur du moment fléchissant. On a, par analogie avec la formule [32],

$$\mu = \frac{px^2}{2} - Q_0x;$$

son minimum analytique répondant à $px = Q_0$, est

$$\mu' = -\frac{Q_0^2}{2p}.$$

tandis que, par $x = a$, on a

$$\mu_1 = \frac{pa^3}{2} - Q_0a.$$

Comme c'est la plus grande des valeurs absolues des deux moments μ_1 et μ' qui doit déterminer les dimensions à donner à la poutre, faisons en sorte qu'elles soient égales. Ainsi

$$\frac{Q_0^2}{2p} = \frac{pa^3}{2} - Q_0a, \text{ d'où } Q_0 = \left(-1 + \sqrt{2}\right) pa.$$

Par suite

$$\mu_1' = -\mu' = \frac{\left(-1 + \sqrt{2}\right)^2}{2} pa^2 = 0,086 pa^2$$

au lieu de $\mu_1 = 0,125 pa^2$ trouvé (44) dans l'hypothèse des trois appuis de niveau.

La plus grande valeur du moment fléchissant étant ainsi trouvée, la formule [10] donne

$$R' = 0,086 pa^2 \frac{v'}{I},$$

ce qui servira à résoudre diverses questions; par exemple, à connaître la charge possible p , si l'on se donne R' , a et $\frac{I}{v'}$.

Supposé qu'il s'agisse d'une poutre en fer, en forme de double T; qu'on ait $a = 20^m$; $v' = 0^m,50$; $\frac{I}{v'} = 0^m,0149$; et qu'on s'impose la limite $R' = 6^ks \times 10^6$. On en conclut $p = 2600^ks$ pour la charge possible par mètre courant de la poutre.

Il reste à calculer la valeur de y_1 nécessaire pour satisfaire à la condition $\mu_1 = -\mu'$. Il suffit de substituer dans [42] l'expression de $\mu_1 = 0,086 pa^2$: on obtient

$$\varepsilon y_1 = 0,013 pa^4$$

et, en faisant, outre nos données précédentes, $E = 2 \times 10^{10}$, on trouve

$$y_1 = \frac{0,013 \times 2600 \times 16 \times 10^4}{2 \times 10^{10} \times 0,0149 \times 0,5} = 0^m,036.$$

Tel est l'abaissement de l'appui du milieu, qui suffirait pour réduire le plus grand moment fléchissant dans le rapport de 0,125 à 0,086, et augmenter la charge possible dans le rapport inverse.

68. Quatre travées égales, également chargées; les cinq appuis de niveau. — L'équation [40] par $l_1 = l_2 = a$ et $p_1 = p_2 = p$, devient

$$2\mu_0 + 8\mu_1 + 2\mu_2 = pa^2$$

applicable à deux travées consécutives quelconques par l'augmentation des indices. On a ainsi en tout trois équations dans lesquelles il faut faire $\mu_0 = 0$, et $\mu_4 = 0$. Donc

$$8\mu_1 + 2\mu_2 = pa^2, \quad [43]$$

$$| \quad 2\mu_1 + 8\mu_2 + 2\mu_3 = pa^2, \quad [44]$$

$$2\mu_2 + 8\mu_3 + pa^2, \quad [45]$$

trois équations du premier degré pour trois inconnues. De [43] et [45] on conclut $\mu_2 = \mu_1$, ce qui résulte d'ailleurs de la symétrie. [44] devient donc

$$4\mu_1 + 8\mu_2 = pa^2,$$

ce qui avec [43] donne

$$\mu_1 = \frac{3}{28} pa^2, \quad \text{et} \quad \mu_2 = \frac{1}{14} pa^2. \quad [46]$$

Pour déterminer Q_0 , l'équilibre de la première travée donne l'équation de moments autour de M_1 :

$$Q_0 a - \frac{1}{2} pa^2 + \mu_1 = 0, \quad [47]$$

d'où, d'après la valeur [46] de μ_1 ,

$$Q_0 = \frac{11}{28} pa = 0,393 pa.$$

L'équilibre de l'ensemble des deux premières travées donne l'équation des moments autour du troisième appui M_3 :

$$2Q_0a - 2pa^3 + Q_1a + \mu_3 = 0; \quad [48]$$

d'où, d'après les valeurs obtenues de μ_3 et de Q_0 ,

$$Q_1 = \frac{32}{28} pa = 1,143 pa.$$

Pour trouver Q_2 on a, par la statique,

$$2Q_0 + 2Q_1 + Q_2 = 4pa, \quad \text{d'où} \quad Q_2 = \frac{26}{28} pa = 0,929 pa.$$

En désignant par L la longueur totale $4a$, on a

$$Q_0 = \frac{11}{112} pL, \quad Q_1 = \frac{32}{112} pL, \quad Q_2 = \frac{26}{112} pL.$$

Cherchons encore dans ce cas la plus grande valeur du moment fléchissant, dans le cours de chaque travée.

Dans la première l'équation d'équilibre analogue à [37] est

$$\mu = \frac{px^3}{2} - \frac{11}{28} pax,$$

dont le minimum analytique, répondant à $\frac{11}{28} a$ est

$$\mu' = -0,0771 pa^2.$$

Pour un point quelconque de la seconde travée on a [37]

$$\mu = \frac{px^3}{2} - \frac{15}{28} pax + \frac{3pa^2}{28},$$

dont le minimum analytique répondant à $x = \frac{15a}{28}$, est

$$\mu'' = -0,0364 pa^2.$$

En résumé les quatre moments fléchissants principaux sont

$$\mu' = -0,0771 pa^2, \quad \mu_1 = 0,1071 pa^2,$$

$$\mu'' = -0,0364 pa^2, \quad \mu_2 = 0,0714 pa^2.$$

Suivant la remarque faite au numéro 66, on voit de quel intérêt il serait de diminuer la valeur de μ_1 en augmentant s'il le faut celles des autres moments fléchissants. C'est ce que nous allons faire par l'abaissement des appuis intermédiaires.

69. Quatre travées égales et également chargées. Appuis à différents niveaux. — Appuis, deuxième et quatrième à un même niveau plus bas que celui des appuis extrêmes; appui central à un autre niveau plus bas encore.

L'équation [39] appliquée aux deux premières travées devient par $p_1 = p_2 = p$, $l_1 = l_2 = a$, $e_1 = e_2 = e$, et $\mu_0 = 0$,

$$8\mu_1 + 2\mu_2 = pa^2 - \frac{12e}{a^2} (y_1 - y_2).$$

La même formule [39] appliquée aux travées, deuxième et troisième, et où l'on remplace μ_0 par μ_1 , μ_1 par μ_2 , μ_2 par $\mu_3 = \mu_1$ et $y_1 - y_2$ par $y_2 - y_3 = 2y_2$, devient

$$4\mu_1 + 8\mu_2 = pa^2 - \frac{24e}{a^2} y_2.$$

Ces deux équations du premier degré en μ_1 et μ_2 donnent

$$\mu_1 = \frac{3pa^2}{28} - \frac{6e}{7a^2} (2y_1 - 3y_2), \quad [49]$$

$$\mu_2 = \frac{pa^2}{14} - \frac{6\epsilon}{7a^2} (5y_2 - y_1) . \quad [50]$$

Cherchons les minimums analytiques dans le cours des deux travées. Dans la première, l'équation analogue à [37] est

$$\mu = \frac{px^2}{2} - \left(\frac{pa^2}{2} - \mu_1 \right) \frac{x}{a} ,$$

dont le minimum

$$\mu' = -\frac{1}{2pa^2} \left(\frac{pa^2}{2} - \mu_1 \right)^2 . \quad [51]$$

Dans la deuxième travée, la même formule [37] devient

$$\mu = \frac{px^2}{2} - \left(\frac{pa^2}{2} + \mu_1 - \mu_2 \right) \frac{x}{a} + \mu_1 ,$$

dont le minimum

$$\mu'' = -\frac{1}{2pa^2} \left(\frac{pa^2}{2} + \mu_1 - \mu_2 \right)^2 + \mu_1 . \quad [52]$$

Ayant ainsi quatre équations entre μ_1 , μ_2 , μ' , μ'' , y_1 et y_2 , cherchons à déterminer ces six quantités de la manière la plus avantageuse. On vient de voir (67) que, lorsque les cinq appuis sont de niveau, les deux moments fléchissants μ_1 et $-\mu''$ sont, l'un, le plus grand, et l'autre, le plus petit. Faisons-les égaux en posant

$$\mu_1 = -\mu'' = kpa^2 .$$

Les équations [49] et [50] deviennent en conséquence

$$-\mu' = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - k \right)^2 p a^3 ,$$

$$\mu_2 = \left(\frac{1}{2} + k - 2 \sqrt{k} \right) p a^3 .$$

En considérant ces formules, on voit que μ_1 et μ'' diminuent comme k ; mais en même temps $-\mu'$ augmente. De là il suit que la meilleure valeur de k est celle qui rend égaux les trois moments μ_1 , $-\mu''$ et $-\mu'$. Ainsi

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - k \right)^2 = k, \quad \text{ou} \quad k^2 - 3k + \frac{1}{4} = 0 ,$$

d'où

$$k = \frac{3}{2} - \sqrt{2} = 0,086 .$$

Or il se trouve que cette même valeur de k rend nul le moment μ_2 , car l'équation $\frac{1}{2} + k = 2 \sqrt{k}$ revient à la précédente.

On peut donc faire simultanément

$$\mu_1 = -\mu'' = -\mu' = 0,086 p a^3 \quad \text{et} \quad \mu_2 = 0 ,$$

tandis que si les appuis étaient de niveau, on aurait

$$\mu_1 = 0,107 p a^3 .$$

Il reste à savoir quelles seront les valeurs correspondantes

de y_1 et de y_2 . Les équations [47] et [48] deviennent

$$\frac{6\varepsilon}{7a^3}(2y_1 - 3y_2) = 0,021 pa^2,$$

$$\frac{6\varepsilon}{7a^3}(5y_2 - y_1) = 0,071 pa^2,$$

et l'on en conclut

$$y_1 = 0,053 \frac{pa^4}{\varepsilon} \quad \text{et} \quad y_2 = 0,027 \frac{pa^4}{\varepsilon}.$$

Quant aux réactions Q_0 et Q_1 , les équations [47] et [48] subsistent et donnent

$$Q_0 = 0,414 pa; \quad Q_1 = 1,172 pa; \quad \text{d'où} \quad Q_2 = 0,828 pa,$$

au lieu des valeurs

$$0,393 \quad \quad \quad 1,142 \quad \quad \quad 0,928$$

trouvées quand les appuis sont de niveau (68).

Remarque. — Un résultat qui semble assez curieux de cette théorie est que dans l'espace $4a$ divisé en quatre parties égales par cinq appuis, soit qu'on emploie une seule poutre, ou deux ayant chacune la longueur $2a$, si dans chaque cas on règle les différences de niveau des appuis de la manière la plus favorable à la résistance, la valeur du plus grand moment fléchissant sera la même dans les deux hypothèses. Seulement les niveaux des appuis seront disposés autrement.

70. Poutre uniformément chargée et divisée par cinq appuis en quatre travées symétriquement égales deux à deux.

La charge uniforme par unité de longueur est p .

La portée des deux travées extrêmes est l ; celle des deux travées intermédiaires est nl .

La différence de niveau de M_1 au-dessous de M_0 et de M_2 au-dessous de M_4 est y_1 ; celle de M_2 au-dessous de M_3 et de M_4 est y_2 .

D'après cela l'équation [39] appliquée d'abord aux deux premières travées, puis à la seconde et à la troisième, devient

$$8(1+n)\mu_1 + 4n\mu_2 = (1+n^3)p l^3 - \frac{24\epsilon}{l^2} \left(y_1 - \frac{y_2}{n} \right),$$

$$4n\mu_1 + 8n\mu_2 = n^3 p l^3 - \frac{24\epsilon}{l^2} \frac{y_2}{n},$$

d'où

$$(12n+16)\mu_1 = (n^3+2)p l^3 - \frac{24\epsilon}{l^2} \left(2y_1 - 3\frac{y_2}{n} \right), \quad [53]$$

$$(12n^2+16n)\mu_2 = (n^4+2n^3-n)p l^3 - \frac{24\epsilon}{l^2} \left(\left(3 + \frac{2}{n} \right) y_2 - n y_1 \right). \quad [54]$$

Quant au minimum analytique dans le cours de chaque travée, les équations [51] et [52] subsistent si l'on remplace a par l dans la première, et a par nl dans la seconde; donc

$$\mu' = -\frac{1}{2pl^2} \left(\frac{pl^2}{2} - \mu_1 \right)^2, \quad [55]$$

$$\mu'' = -\frac{1}{2pl^2} \cdot \frac{1}{n^2} \left(\frac{n^2 pl^2}{2} + \mu_1 - \mu_2 \right)^2 + \mu_1. \quad [56]$$

Supposant données la charge p et la somme $l + nl$ des deux premières travées, proposons-nous de déterminer n , y_1 et y_2 de

la manière la plus favorable, et pour cela imposons-nous la condition que les quatre valeurs absolues μ_1 , μ_2 , $-\mu'$ et $-\mu''$ soient égales, et représentons-les par $kp l^2$.

L'équation [55] devenant $2k = \left(\frac{1}{2} - k\right)^2$ donne

$$k = \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{1}{2}} = 0,086.$$

L'équation [56] devenant $4n^2k = \left(\frac{n^2}{2}\right)^2$ donne

$$n = 4\sqrt{k} = 1,173 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{n} = 0,85.$$

Ainsi la première portée l serait les 0,85 de la seconde.

En représentant par $2a$ la somme des deux portées l et nl , nous avons

$$l = \frac{2a}{1+n} = 0,92a$$

et

$$\mu_1 = 0,086pl^2 = 0,086 \times 0,85pa^2 = 0,073pa^2,$$

tandis que si les quatre portées étaient égales, le plus grand moment fléchissant, dans l'hypothèse la plus favorable (69), serait égal à $0,086pa^2$, et, dans le cas des appuis de niveau, à $0,107pa^2$.

Connaissant $n = 1,173$; $l = 0,92a$ et $\mu_1 = \mu_2 = 0,073pa^2$, on a les deux équations du premier degré [53] et [54] pour calculer les différences de niveau y_1 et y_2 , et l'on trouve approximativement

$$y_1 = 0,117 \frac{pa^4}{\epsilon} \quad \text{et} \quad y_2 = 0,052 \frac{pa^4}{\epsilon}.$$

71. Pontres naturellement courbes substituées aux poutres droites. — L'avantage de mettre à des niveaux différents les appuis d'une poutre naturellement droite est incontestable; mais il se peut que le constructeur veuille éviter ces différences de niveau, quelque peu sensibles qu'elles doivent être au simple aspect. Le moyen de les faire disparaître en conservant le même avantage sous le rapport de la résistance, est de donner à la poutre une forme qui naturellement, c'est-à-dire sans charge, soit faiblement curviligne, en sens contraire de celle qu'elle prendrait si elle était droite. Ainsi, dans le cas du numéro précédent, la poutre étant couchée sans charge dans le chantier, les deux points situés à la distance l des extrémités seraient à la distance y_1 , et le milieu à la distance $y_1 + y_2$ de la droite joignant les deux extrémités.

72. Poutre prismatique en trois travées destinées à diverses épreuves. — Cette poutre est supposée naturellement droite; posée sur quatre appuis de niveau, elle forme trois travées dont les deux extrêmes sont égales. Leur portée est désignée par l_1 , et celle de la travée du milieu par l_2 . Ces trois travées doivent subir deux espèces de charges, savoir : 1° une charge dite *permanente*, uniformément répartie dans l'étendue des trois travées, à raison de p kilogrammes par mètre courant de poutre; 2° une charge additionnelle et accidentelle, dite charge *d'épreuve*, uniformément répartie, à raison de p_e kilogrammes par mètre de longueur, tantôt sur une travée, tantôt sur deux ou trois, ce qui constitue cinq cas accidentels différents.

Nous nous proposons de calculer pour un certain nombre de points de la poutre le moment fléchissant et l'effort tranchant qu'en chacun de ces points elle aura à subir, soit sous la charge permanente seule, soit dans chacune de ces épreuves.

Appliquons les formules précédentes à la donnée spéciale de trois travées dont la première et la troisième sont égales.

La formule [40] appliquée successivement au groupe des deux

premières travées, puis à celui de la seconde et de la troisième devient, eu égard à la condition $l_3 = l_1$,

$$8 (l_1 + l_2) \mu_1 + 4l_2\mu_2 = l_1^3 p_1 + l_2^3 p_2,$$

$$4 l_2\mu_1 + 8 (l_1 + l_2) \mu_2 = l_2^3 p_1 + l_1^3 p_2;$$

d'où l'on tire

$$L (\mu_1 - \mu_2) = l_1^3 (p_1 - p_2),$$

$$L'(\mu_1 + \mu_2) = l_1^3 (p_1 + p_2) + 2l_2^3 p_2,$$

en faisant

$$L = 8l_1 + 4l_2 \quad \text{et} \quad L' = 8l_1 + 12l_2;$$

et l'on en conclut

$$\mu_1 = \frac{l_1^3}{2} \left(\frac{1}{L} + \frac{1}{L'} \right) p_1 + \frac{l_2^3}{L'} p_2 - \frac{l_1^3}{2} \left(\frac{1}{L} - \frac{1}{L'} \right) p_2,$$

$$\mu_2 = - \frac{l_1^3}{2} \left(\frac{1}{L} - \frac{1}{L'} \right) p_1 + \frac{l_2^3}{L'} p_2 + \frac{l_1^3}{2} \left(\frac{1}{L} + \frac{1}{L'} \right) p_2,$$

formules que, en faisant, pour abrégér,

$$\frac{l_1^3}{2} \left(\frac{1}{L} + \frac{1}{L'} \right) = k', \quad \frac{l_1^3}{2} \left(\frac{1}{L} - \frac{1}{L'} \right) = k'', \quad \text{et} \quad \frac{l_2^3}{L'} = k''',$$

on réduit à

$$\mu_1 = k' p_1 + k''' p_2 - k'' p_2,$$

$$\mu_2 = - k'' p_1 + k''' p_2 + k' p_2.$$

Ces expressions vont servir à calculer les moments fléchissants en divers points donnés des deux travées. A cet effet faisons usage de la formule [37] appliquée d'abord à la première travée, puis à la seconde, par l'augmentation des indices. Le moment variable dans chaque travée étant une fonction de x , nous le désignons par la notation μ_{x1} pour la première travée et μ_{x2} pour la seconde. Nous obtenons en conséquence les deux formules générales suivantes, dont nous ordonnons les termes relativement aux charges p_1 , p_2 et p_3 :

$$\mu_{x1} = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{l_1 x}{2} + \frac{kx^3}{l_1} \right) p_1 + \frac{k'''x}{l_1} p_2 - \frac{k''x}{l_1} p_3,$$

$$\mu_{x2} = \left(k' - \frac{k' + k''}{l_2} x \right) p_1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{l_2 x}{2} + k''' \right) p_2 + \left(\frac{k' + k''}{l_2} x - k'' \right) p_3.$$

Ces quantités se réduisent, la première, à zéro par $x = 0$, et à μ_1 par $x = l_1$, la seconde, à μ_1 par $x = 0$, et à μ_2 par $x = l_2$, comme cela doit être. Nous représentons, pour simplifier, ces formules par

$$\mu_{x1} = X_1' p_1 + X_1'' p_2 + X_1''' p_3,$$

$$\mu_{x2} = X_2' p_1 + X_2'' p_2 + X_2''' p_3,$$

en désignant par X' , X'' ,... des fonctions de x , tantôt positives et tantôt négatives, dont deux sont du second degré, quatre du premier.

Pour satisfaire à la question proposée, quant aux moments fléchissants, il ne s'agit plus que d'appliquer ces deux formules aux divers cas indiqués ci-dessus. On aura les six combinaisons consignées dans le tableau suivant.

DISTRIBUTION DES CHARGES.	MOMENTS FLÉCHISSANTS VARIABLES AVEC x .
Charge permanente seule sur les 3 travées..... $p_1 = p_2 = p_3 = p$.	$\left\{ \begin{array}{l} 1^{\text{re}} \text{ travée } (X'_1 + X''_1 + X'''_1) p = X_1 p \\ 2^{\text{e}} \text{ travée } (X'_2 + X''_2 + X'''_2) p = X_2 p \end{array} \right.$
Charge d'épreuve ajoutée sur la 1 ^{re} travée..... $p_1 = p + p_0, p_2 = p_3 = p$	$\left\{ \begin{array}{l} 1^{\text{re}} \text{ travée } X_1 p + X'_1 p_0 \\ 2^{\text{e}} \text{ travée } X_2 p + X'_2 p_0 \end{array} \right.$
Charge d'épreuve ajoutée sur la 2 ^e travée..... $p_1 = p_2 = p, p_3 = p + p_0$	$\left\{ \begin{array}{l} 1^{\text{re}} \text{ travée } X_1 p + X''_1 p_0 \\ 2^{\text{e}} \text{ travée } X_2 p + X'_2 p_0 \end{array} \right.$
Charge d'épreuve ajoutée sur la 1 ^{re} et la 2 ^e travée..... $p_1 = p_2 = p + p_0, p_3 = p$	$\left\{ \begin{array}{l} 1^{\text{re}} \text{ travée } X_1 p + X'_1 p_0 + X''_1 p_0 \\ 2^{\text{e}} \text{ travée } X_2 p + X'_2 p_0 + X''_2 p_0 \end{array} \right.$
Charge d'épreuve ajoutée sur la 1 ^{re} et la 3 ^e travée..... $p_1 = p_2 = p + p_0, p_3 = p_0$	$\left\{ \begin{array}{l} 1^{\text{re}} \text{ travée } X_1 p + X'_1 p_0 + X'''_1 p_0 \\ 2^{\text{e}} \text{ travée } X_2 p + X'_2 p_0 + X'''_2 p_0 \end{array} \right.$
Charge d'épreuve ajoutée sur les 3 travées..... $p_1 = p_2 = p_3 = p + p_0$	$\left\{ \begin{array}{l} 1^{\text{re}} \text{ travée } X_1 p + X'_1 p_0 + X''_1 p_0 + X'''_1 p_0 \\ 2^{\text{e}} \text{ travée } X_2 p + X'_2 p_0 + X''_2 p_0 + X'''_2 p_0 \end{array} \right.$

Ces divers moments fléchissants variables étant tous des fonctions du second degré de x , pourront être calculés rapidement, si, dans chaque travée, l'on fait croître x ou les rapports $\frac{x}{l_1}$ et $\frac{x}{l_2}$, par équidifférence : il en résultera que dans chaque travée le moment fléchissant variera par différence seconde constante.

En comparant les six moments correspondants à une même distance x , on verra quel est en chaque point le plus grand moment fléchissant que la poutre y aura à subir. On pourra peindre aux yeux la loi qui lie les résultats obtenus, par une courbe qui, dans chaque travée, aura pour abscisses les distances x et pour ordonnées les plus grands moments. Cette courbe sera composée d'arcs de parabole.

Le calcul des efforts tranchants correspondants aux mêmes distances x est beaucoup plus simple. En appliquant les formules [31] et [30] à la première travée et à la seconde, et en désignant l'effort variable par T_{x1} dans la première et par T_{x2} dans la seconde, on a

$$T_{x1} = \frac{p_1 l_1}{2} - \frac{\mu_1}{l_1} - p_1 x,$$

$$T_{x2} = \frac{p_2 l_2}{2} + \frac{\mu_1 - \mu_2}{l_2} - p_2 x;$$

ou, en mettant pour μ_1 et μ_2 leurs expressions ci-dessus établies,

$$T_{x1} = \left(\frac{l_1}{2} + \frac{k'}{l_1} - x \right) p_1 - \frac{k''}{l_1} p_2 + \frac{k''}{l_1} p_3,$$

$$T_{x2} = \frac{k' + k''}{l_2} p_1 + \left(\frac{l_2}{2} - x \right) p_2 - \frac{k' + k''}{l_2} p_3.$$

C'est ce qu'on obtient directement, d'après le théorème du numéro 53, en différenciant les fonctions μ_{x1} et μ_{x2} .

Pour appliquer ces formules aux six combinaisons précisées au tableau de la page précédente, on dressera un tableau analogue, qu'il serait superflu de donner ici. Dans tous les cas, l'effort tranchant variable étant du premier degré en x , ses valeurs varieront par différences proportionnelles à celles des x .

La même méthode s'appliquerait à un nombre quelconque de travées de niveau. Pour quatre travées, le moment fléchissant variable dans l'une d'elles serait exprimé sous la forme

$$\mu_{xn} = X_n' p_1 + X_n'' p_2 + X_n''' p_3 + X_n^{IV} p_4,$$

de sorte que les quatre coefficients fonctions de x et de lon-

guezurs l_1, l_2, \dots une fois calculés, serviraient à toutes les hypothèses qu'on voudrait faire sur les charges p_1, p_2, \dots dont les effets s'ajoutent algébriquement pour produire le moment μ_{xn} . L'effort tranchant T_{xn} serait exprimé d'une manière analogue.

73. Poutre sur trois appuis avec charges discontinues.—

Autre cas particulier de l'énoncé du numéro 60; solide composé de deux parties prismatiques $B'A, AB$ (fig. 17) posé sur trois appuis de niveau B', A, B , soumis à deux charges uniformément réparties sur AB et sur AB' et à deux forces distinctes P', P , aux points intermédiaires C', C . La détermination des réactions Q et Q' des appuis B et B' pourrait se faire par la méthode générale indiquée au numéro 60, mais elle se ramène à la question du numéro 34. En appelant α_0 l'inclinaison de la courbe moyenne en A au-dessous de l'horizontale AB , on a l'équation [21] du numéro 38 qui se simplifie d'après l'énoncé par $y_1 = 0$, et devient

$$\varepsilon \alpha_0 + \frac{1}{8} p a^3 + \frac{1}{2} P l^2 \left(1 - \frac{l}{3a} \right) - \frac{1}{3} Q a^3 = 0.$$

Ensuite remarquons que la partie $AC'B'$ du solide donne une équation toute pareille, si ce n'est que α_0 y est remplacé par $-\alpha_0$, et ε, a, l, p, Q par $\varepsilon', a', l', p', Q'$. Ainsi

$$-\varepsilon' \alpha_0 + \frac{1}{8} p' a'^3 + \frac{1}{2} P' l'^2 \left(1 - \frac{l'}{3a'} \right) - \frac{1}{3} Q' a'^3 = 0.$$

On obtient d'ailleurs une autre relation entre Q et Q' , en posant d'après la statique l'équation des moments des forces extérieures autour de A , où agit une troisième réaction inconnue,

$$Qa - Q'a' - \frac{1}{2} p a^2 + \frac{1}{2} p' a'^2 - Pl + P'l' = 0.$$

Les inconnues Q , Q' , α_0 sont ainsi déterminées par trois équations du premier degré, et les autres questions à résoudre ne présentent plus aucune difficulté.

74. Cas plus particulier. — Poutre entièrement prismatique, chargée uniformément. $R = P' = 0$, $p' = p$, $\epsilon' = \epsilon$. Les équations précédentes deviennent

$$Qa^3 + Q'a'^3 = \frac{3}{8} p (a^3 + a'^3),$$

et

$$Qa - Q'a' = \frac{1}{2} p (a^2 - a'^2),$$

d'où en multipliant la deuxième par a' , ajoutant et divisant par $a(a + a')$, on tire

$$Q = \frac{1}{8} p \left(3a + a' - \frac{a'^2}{a} \right),$$

et en changeant les accents

$$Q' = \frac{1}{8} p \left(3a' + a - \frac{a^2}{a'} \right).$$

L'une de ces forces peut devenir négative; la pièce tendrait à soulever l'un des appuis.

Soit S la réaction de l'appui A; on a, d'après la statique,

$$S + Q + Q' - p(a + a') = 0,$$

et, par suite,

$$S = \frac{1}{2} p (a + a') \left[\frac{5}{4} + \frac{(a' - a)^2}{4aa'} \right];$$

d'où il résulte que si la pièce est effectivement assujettie à trois

points en ligne droite, 1° l'appui intermédiaire porte toujours au moins les $\frac{5}{8}$ de la charge totale $p(a + a')$, 2° que la réaction S croît sans limite à mesure que la plus grande des distances a' et a augmente, leur somme restant constante.

Si dans les formules précédentes on suppose $a' = a$, on retrouve, conformément aux numéros 44 et 66,

$$Q = Q' = \frac{3}{8}pa \quad \text{et} \quad S = \frac{10}{8}pa.$$

75. Aiguilles d'un barrage soutenant une charge d'eau. —

Ce cas se distingue des précédents en ce que la charge répartie sur le solide fléchi n'est plus simplement proportionnelle à la longueur.

Soient (fig. 48) b la largeur d'une aiguille perpendiculairement au plan de la figure, et c son épaisseur parallèlement à la poussée de l'eau; $AB = a$, $AC = h$, $AC' = h'$, $CM = z$, $C'M' = z'$.

La pression en amont sur un élément superficiel dont la hauteur est MM , ou dz et la largeur est b , s'exprime par $\Pi bz dz$, le poids d'un mètre cube d'eau étant Π . La somme des pressions en amont est donc $\frac{1}{2} \Pi b h^2$. De même la somme des pressions en aval est $\frac{1}{2} \Pi b h'^2$. Ces pressions sont en équilibre avec les réactions Q et Q' des appuis B et A . On aura Q en prenant les moments autour de A , savoir :

$$Qa = \int_0^h \Pi bz dz (h - z) - \int_0^{h'} \Pi bz' dz' (h - z'),$$

$$Q = \frac{1}{6} \Pi \frac{b}{a} (h^3 - h'^3);$$

donc

$$Q' = \frac{1}{2} \Pi b (h^3 - h'^3) - \frac{1}{6} \Pi \frac{b}{a} (h^3 - h'^3).$$

Le moment fléchissant μ au point quelconque M s'obtient en considérant les forces qui agissent au-dessus de ce point. Soit x la distance au point C d'un point variable entre C et M ; on a

$$\left. \begin{aligned} \mu &= Q(a - h + z) - \int_{x=0}^{x=z} \Pi x b dx (z - x) \\ &= Q(a - h + z) - \frac{1}{6} \Pi b z^3. \end{aligned} \right\} \quad [57]$$

Le maximum de μ entre C et C' s'obtient en égalant à zéro la dérivée du second nombre :

$$0 = Q - \frac{1}{2} \Pi b z^2, \quad \text{ou} \quad 0 = \frac{1}{6} \Pi \frac{b}{a} (h^3 - h'^3) - \frac{1}{2} \Pi b z^2,$$

d'où

$$z = \sqrt{\frac{h^3 - h'^3}{3a}},$$

valeur qui n'est applicable à la question qu'autant qu'elle est plus petite que CC' ou $h - h'$.

Cette condition étant vérifiée, on aura l'expression du plus grand moment fléchissant en substituant la dernière valeur de z dans la formule [57] ci-dessus.

Dans le cas contraire, il faut chercher le point de plus grande flexion entre A et C' . Soit y la distance AM' d'un point quelconque de la courbe AC' au point A . L'équilibre de la partie AM'

sous l'action de la force Q' et des pressions d'amont et d'aval, donne

$$\mu = Q'y - \Pi (h - h') by \cdot \frac{y}{2},$$

dont le maximum répond à

$$Q' - \Pi (h - h') by = 0;$$

d'où

$$y = \frac{h + h'}{2} - \frac{h^3 - h'^3}{6a(h - h')}, \quad \text{et} \quad \mu = \frac{1}{2} \Pi b (h - h') y^2,$$

formules applicables si y se trouve $< h'$.

§ 7.

DÉTERMINATION DES DIMENSIONS DU PROFIL EN TRAVERS D'UNE PIÈCE CHARGÉE TRANSVERSALEMENT.

76. Condition déduite de la pression longitudinale. —
Lorsqu'on connaît le moment fléchissant μ qui répond à un point donné de la courbe moyenne, si l'on s'impose la valeur R' de la plus grande force élastique longitudinale qui doit avoir lieu dans le plan normal correspondant, on a pour l'une des conditions auxquelles doit satisfaire le profil transversal l'équation [12]

$$\frac{R'I}{v'} = \mu ,$$

et pour compléter la détermination, il faut adopter des données desquelles il résulte que le profil cherché ne dépende que d'une inconnue.

Par exemple, si la section transversale du solide doit être un rectangle dont les côtés soient dans un rapport donné, en désignant ces côtés par c parallèle aux forces et $b = nc$ perpendiculaire au plan de flexion, on a

$$I = \frac{1}{12} bc^3, \quad v' = \frac{1}{2} c, \quad \frac{I}{v'} = \frac{1}{6} bc^2 = \frac{1}{6} nc^3 ,$$

$$\frac{R'I}{v'} = \frac{1}{6} nc^3 R' = \mu ,$$

d'où l'on conclura c .

Si l'on se donnait le côté b du rectangle, on trouverait le côté c par l'équation $\frac{1}{6} bc^2 R' = \mu$.

Si l'on suppose connu le côté c , on obtient l'aire Ω ou bc du rectangle par l'équation $\frac{1}{6} \Omega c R' = \mu$, ce qui montre l'avantage économique d'augmenter la dimension c parallèle aux forces transversales, puisque la section Ω varie en raison inverse.

Cependant dans la pratique, s'il s'agit de poutres ou solives en bois, on fait rarement $b < \frac{1}{2} c$ et souvent $b = \frac{5}{7} c$.

On peut aisément se rendre compte, à un certain point de vue, de la nécessité de ne pas faire descendre le rapport n au-dessous d'une certaine limite, car il faut au moins que la pièce puisse supporter l'effort tranchant T qui a lieu dans la section dont il s'agit, et par conséquent en appelant F' la résistance par unité de surface au glissement transversal, qu'on ne doit ou ne veut pas dépasser (conformément à la signification adoptée (16 et 47) pour la lettre F), il faut satisfaire à la condition

$$\frac{T}{\Omega} < F'.$$

Mais une autre considération peut conduire à une limite plus petite, comme nous allons le voir.

77. Résistance au glissement longitudinal des fibres. Cas du profil rectangulaire. — Considérons la pièce comme formée à droite de la section $A'A''$ (fig. 49) de couches infiniment petites $A''A_1B_1B''$, $A_1A_2B_2B_1$, ..., dont les distances à la couche neutre MN sont désignées par v'' , v_1 , v_2 , ..., couches ayant l'épaisseur dv , et la largeur b perpendiculaire au plan de la figure.

La portion de couche qui dans l'état primitif avait la longueur Ab et a actuellement la longueur AB est sollicitée à son

extrémité A par une force $Rb\,dv$ dirigée à droite et égale à $\frac{\mu v}{I} \cdot b\,dv$, le moment fléchissant μ étant égal à la somme des moments autour de M des forces extérieures P qui s'exercent depuis M jusqu'au bout de la pièce. A l'extrémité B de la portion de couche AB, la force que celle-ci exerce sur le reste de la pièce à droite, et, par conséquent, la réaction qu'elle en reçoit en sens contraire, est exprimée par la même formule, si ce n'est que μ devient $\mu + d\mu$, somme des moments autour de N des forces P qui agissent depuis N jusqu'à l'extrémité de la pièce. Donc la résultante des forces longitudinales que la couche AB subit sur ses deux bases est

$$-d\mu \cdot \frac{b}{I} v\,dv.$$

Or, suivant le théorème du numéro 53, on a

$$-d\mu = T\,dx,$$

en appelant comme précédemment T l'effort tranchant correspondant au point M ou à l'abscisse x , dont la différentielle dx est la longueur MN.

Donc la résultante longitudinale ci-dessus mentionnée est exprimée par

$$T\,dx \cdot \frac{b}{I} v\,dv.$$

La couche AB ne peut donc être maintenue en équilibre que parce qu'elle reçoit des couches voisines des forces qui s'opposent à son glissement et dont la résultante a la même valeur en sens contraire.

Ainsi la couche A''A₁B₁B' est tirée à gauche par une force $T\,dx \cdot \frac{b}{I} v'\,dv$ qu'exerce la couche A₁A₂B₂B₁; celle-ci est tirée

du même côté par des forces dont la résultante est $Tdx \frac{b}{I} v, dv$ et dont l'une est la réaction égale et opposée à la précédente ; par conséquent, la force dirigée à gauche et exercée sur la couche $A_1 A_2 B_2 B_1$ par la suivante $A_2 A_3 B_3 B_2$ est égale à

$$Tdx \frac{b}{I} (v' dv + v, dv).$$

En raisonnant de même pour les couches successives, on voit que la force opposée à leur glissement mutuel va en augmentant depuis $A''B''$ jusqu'à MN , où cette force acquiert la valeur

$$Tdx \frac{b}{I} \int_0^{v''} v dv (*).$$

C'est ce qu'on trouve également en considérant l'ensemble des couches comprises entre $A''B''$ et MN . La résultante des forces exercées sur les basses $A''M$ et $B''N$ est la somme des forces analogues à la force $Tdx \frac{b}{I} v dv$ relative à la couche AB .

Cette résultante est donc $Tdx \frac{b}{I} \int_0^{v''} v dv$; sa direction positive est à droite, par conséquent la résistance longitudinale que reçoit le solide $A''MNB''$ de droite à gauche, de la part du solide $A'MNB'$, a cette même valeur.

v'' étant remplacé par $\frac{1}{2} c$ et I par $\frac{1}{12} bc^3$, on a

$$\int_0^{v''} v dv = \frac{1}{8} c^2,$$

(*) Cette formule a été démontrée d'une autre manière à l'Ecole des ponts et chaussées par M. Bresse, qui a emprunté, comme il le dit, à un Mémoire de M. le colonel russe Jourawski l'idée d'avoir égard au glissement longitudinal des fibres. Ce Mémoire est inséré dans les *Annales des ponts et chaussées*, 1856, 2^e semestre.

et la force opposée au glissement sur la surface $ba x$ projetée en MN se trouve égale à $T dx \frac{12 c^2}{c^3 \cdot 8}$ ou $\frac{3}{2} \frac{T dx}{c}$; par conséquent, en désignant par S cette résistance au glissement longitudinal rapportée à l'unité de surface, et en divisant la dernière expression par la surface $b a x$, on a

$$S = \frac{3}{2} \frac{T}{bc} = \frac{3}{2} \frac{T}{\Omega},$$

Ainsi la force S est d'une moitié en sus plus grande que l'effort tranchant rapporté à l'unité de section transversale.

Si l'on désigne par S' la limite que la force S ne doit pas dépasser, on a

$$\frac{3}{2} \frac{T}{\Omega} < S', \quad \text{d'où} \quad \Omega > \frac{3}{2} \frac{T}{S'}. \quad [58]$$

En comparant cette inégalité à celle qui se déduit (76) de la considération du glissement transversal, savoir :

$$\Omega > \frac{T}{F'}, \quad [59]$$

on voit que si S' est égale à F' , ce qui doit avoir lieu pour les corps à texture grenue, l'inégalité [58] est celle à laquelle il faut avoir égard. Il en est à plus forte raison de même si la limite F' de résistance au glissement transversal est plus grande que la limite S' , comme dans le bois dont les fibres sont parallèles à la ligne moyenne du solide, car si l'on a $\Omega > \frac{3}{2} \frac{T}{S'}$ et $1 > \frac{S'}{F'}$,

on en conclut $\Omega > \frac{3}{2} \frac{T}{F'}$, et l'inégalité [59] est à plus forte raison réalisée.

Dans le cas contraire, si F' était $< \frac{2}{3} S'$, il faudrait faire

$$\Omega = \frac{T}{T'}.$$

78. Résistance au glissement longitudinal dans le cas du profil en forme de double T. — Les mêmes considérations s'appliquent aux pièces dont le profil transversal a la forme d'un doublé T (fig. 20). On peut, pour simplifier, supposer que toutes les parties de ce profil ont de faibles épaisseurs en comparaison de la hauteur. Soient h cette hauteur, ω l'aire de chacune des deux plates-bandes, b l'épaisseur du corps intermédiaire, dit *âme* de la poutre.

En A'' la pression par mètre carré est $R'' = \frac{1}{2} h \frac{\mu}{I}$, et sur l'aire ω , elle est $\frac{h\omega\mu}{2I}$; en B'' sur ω , elle est $\frac{h\omega(\mu + d\mu)}{2I}$, la résultante des forces exercées sur les deux bases de l'élément A''B'' est donc

$$-\frac{h\omega d\mu}{2I} \quad \text{ou} \quad \frac{Tdx}{2I} \cdot h\omega,$$

puisque l'on a toujours $d\mu = -Tdx$. La résultante des forces subies par les deux bases A''M, B''N de l'âme est comme au numéro précédent

$$Tdx \frac{b}{I} \int_0^{v''} v dv = Tdx \frac{b}{I} \cdot \frac{h^2}{8}.$$

Donc la résistance au glissement, suivant MN, est égale à la somme de ces deux forces, et l'on a

$$Sb dx = \frac{Tdx}{I} \left(\frac{h\omega}{2} + \frac{bh^2}{8} \right).$$

D'ailleurs on a approximativement $I = 2\omega \frac{h^2}{4} + \frac{1}{12} bh^3$.

$$\text{Donc } s = \frac{T}{bh} \frac{\omega + \frac{1}{4}bh}{\omega + \frac{1}{6}bh} = \frac{T}{bh} \left(1 + \frac{bh}{12\omega + 2bh} \right). \quad [60]$$

Cette quantité diffère ordinairement peu de $\frac{T}{bh}$, tandis que l'effort tranchant par mètre carré T est $\frac{T}{bh + 2\omega}$, et, par conséquent, notablement plus petit.

Application de la formule précédente. — Supposons que pour une poutre en forme de double T, on connaisse la hauteur h du profil, la largeur a des plates-bandes, le moment fléchissant μ et l'effort tranchant T correspondants à un axe et à une section passant par un point donné de la fibre moyenne ;

Et qu'il s'agisse de déterminer la hauteur z des plates-bandes et l'épaisseur b de l'âme ;

De manière que, pour cette même section, la force élastique longitudinale la plus grande ait la valeur R' , et que la plus grande résistance au glissement longitudinal ait la valeur donnée S' par unité de surface.

On aura très-approximativement, d'après ce qui précède, en négligeant z auprès de h ,

$$\frac{S'h}{T} (12\omega b + 2hb^2) = 12\omega + 3hb,$$

$$\omega = az, \quad RI = \frac{\mu h}{2}, \quad I = \frac{h^3 b}{12} + 2 \frac{h^2}{4} az.$$

I pouvant être calculé d'après les données R , μ et h , la dernière équation donnera z et par conséquent ω en fonction du premier degré de l'inconnue b , et la substitution de cette expres-

sion de ω dans sa première équation réduira celle-ci à ne contenir plus d'autre inconnue que b au second degré, Enfin de b on conclura z .

79. Résistance d'un prisme dans le cas de torsion et de flexion simultanées. — Lorsqu'un prisme est simplement tordu par des forces équivalentes à un couple, nous savons (18) déterminer ses dimensions transversales de manière que la force F , par unité de surface, résistant au glissement transversal des points les plus éloignés de l'axe de torsion ou axe moyen, n'ait pas à excéder une limite donnée, qui a été déduite d'expériences faites sur la même substance, dans des circonstances analogues.

Nous venons de voir (76) que si le prisme subit seulement une flexion plane, la détermination des dimensions nécessaires se résoud par la considération des forces élastiques longitudinales R aux mêmes points les plus éloignés de l'axe moyen.

Or, il arrive fréquemment dans les machines qu'un arbre cylindrique subisse simultanément les deux déformations dues à la torsion et à la flexion. Dans ce cas, une règle fort simple et qui doit suffire pour la pratique, serait de calculer, en fonction du rayon inconnu du cylindre et des forces connues, d'abord la force de glissement F , par unité de surface, due à la torsion, puis la tension R , aussi par unité de surface, due à la flexion, et de s'imposer la condition que la résultante

$$\sqrt{F^2 + R^2}$$

de ces deux forces rectangulaires n'excède pas la limite qu'on se donne quand le corps ne subit qu'une des deux déformations. Pour le fer forgé, par exemple, cette limite serait au moins de 6 kilogrammes par millimètre carré; nous disons *au moins* par la raison qu'une pièce tournante, fléchie alternativement dans les deux sens, est plus exposée à l'altération de son élasticité qu'une pièce toujours fléchie du même côté, comme dans les constructions sensiblement immobiles.

§ 8.

SOLIDES D'ÉGALE RÉSISTANCE A FIBRE MOYENNE SENSIBLEMENT RECTILIGNE.

80. Profil transversal variable. — Lorsqu'un solide offre une longueur assez grande relativement à ses dimensions transversales, mais que celles-ci varient au lieu d'être constantes, comme nous l'avons supposé au paragraphe précédent, si cette variation se fait par degrés peu sensibles, on peut concevoir la longueur divisée en plusieurs parties pour chacune desquelles la pièce diffère peu d'un prisme. Supposons que dans son état naturel elle ait une fibre moyenne rectiligne ou très-peu courbée dans un plan, que ses sections transversales soient symétriques par rapport à ce plan et qu'il en soit de même des forces extérieures. La fibre moyenne, après la déformation produite par ces forces, reste dans le même plan appelé plan de flexion, et pour une section quelconque prise en un point *M*, les relations [9] du numéro 20 subsistent et prennent les formes [12] du numéro 26, si les forces extérieures entre ce point et une extrémité ont une résultante parallèle à la section normale ou se réduisent à un couple.

81. Cas d'une force transversale unique. Largeur du profil constante. — Considérons le cas particulier où la pièce de section variable et de faible courbure est à peu près horizontale, maintenue dans cette situation en *O* (fig. 21) par des appuis, et sollicitée à l'extrémité *L* par une force verticale

unique P , de sorte qu'on néglige ici le poids propre de la pièce. Si l'on fait $LM = x$, on a pour la tension longitudinale R' au point A' dont v' est la distance verticale au-dessus de l'axe projeté en M ,

$$\frac{R' I}{v'} = P x,$$

équation dans laquelle I varie avec x .

Supposons, par exemple, que les sections transversales sont toutes rectangulaires, de sorte que la largeur perpendiculaire au plan de la figure soit b constante, tandis que la hauteur $A' A''$ est variable et représentée par z . On a alors

$$I = \frac{bz^3}{12} \quad \text{et} \quad v' = \frac{z}{2},$$

d'où

$$\frac{I}{v'} = \frac{bz^2}{6}$$

et

$$R' 6z^2 = 6Px.$$

On peut faire varier z de manière que R' , la plus grande tension correspondante à l'abscisse x , soit constante dans toute l'étendue AL . La pièce est alors dite *solide d'égale résistance* relativement à toute force agissant comme P à l'extrémité L . Cela signifie seulement que la plus grande force élastique longitudinale par unité de surface est la même dans toutes les sections. Quant aux efforts tranchants, leur intensité totale reste la même P dans une section quelconque; mais leur intensité rapportée à l'unité de surface augmente à mesure que l'aire de la section diminue et en raison inverse.



Pour que R' soit une constante, il faut que z^3 soit proportionnel à x , et si la ligne moyenne AML est droite dans l'état naturel, la courbe A'LA'', dont l'ordonnée variable est $\frac{1}{2}z$, est une parabole du second degré, dont le sommet est L.

82. Hauteur constante. -- Si l'on voulait que dans la section transversale rectangulaire la hauteur z fût constante, pour conserver au solide la propriété d'égale tension longitudinale, il faudrait faire b proportionnel à x . La projection horizontale du corps serait triangulaire.

83. Sections semblables. -- Si la section transversale était circulaire d'un rayon variable z , on aurait $I = \frac{1}{4}\pi z^4$ et $v' = z$, d'où

$$\frac{1}{4}\pi R' z^3 = Px,$$

équation de la courbe méridienne du solide de révolution si R' était constante.

En général si les sections transversales étaient des figures semblables, le quotient $\frac{I}{v'}$ serait proportionnel à v'^3 qui devrait être proportionnel à x pour que la tension R' restât constante.

84. Remarque. -- L'expression de *solide d'égale résistance*, appliquée à ceux dont nous venons de parler, n'est pas bien exacte, puisque la théorie précédente néglige les efforts tranchants qui, rapportés à l'unité de surface, prendraient une valeur très-considérable, si l'aire de la section transversale devenait

très-petite, près du point d'application de la force P , comme le supposent les formules précédentes.

On arriverait à des résultats moins simples quant au calcul, mais bien plus applicables à la pratique si l'on s'imposait la condition de faire qu'aux points A' et A'' les plus éloignés de la ligne moyenne la résultante de la tension R' ou de la pression R'' et de l'effort tranchant par unité de surface $\frac{P}{\Omega}$ restât toujours de même valeur. Ainsi, dans le cas considéré au numéro 81, il faudrait à l'équation $R'bz^2 = 6Px$; joindre

$$R'^2 + \frac{P^2}{b^2z^2} = C^2,$$

C étant une constante, tandis que R' deviendrait variable. En éliminant R' et en posant pour abrégé $\frac{P}{Cb} = k$ qui serait une longueur, on aurait l'équation

$$z^4 - k^2z^2 = 36k^2x^2,$$

qui pour $x = 0$ donne $z = k$, et lorsque x est assez grand pour que k^2 puisse être négligé auprès de $12x$, revient à $z^2 = 6kx$, équation d'une parabole.

85. Problème général de l'égalité de résistance. — Les considérations qui précèdent peuvent être étendues à tout solide long et étroit soumis à des forces quelconques : on peut se proposer de déterminer les dimensions transversales par la condition que la plus grande résultante des forces élastiques par unité de surface aux points d'une section perpendiculaire à la fibre moyenne ait partout une même valeur donnée. On comprend que si les forces extérieures sont aussi données, le problème peut toujours se résoudre numériquement et par approximation.

86. Changements brusques de section transversale. — On a dû remarquer qu'une condition de la théorie de la résistance des pièces fléchies, est que leurs dimensions transversales ne varient que par degrés peu sensibles, comparativement à leur longueur. Un fait expérimental qui prouve l'importance de cette condition, c'est le danger de rupture qui se manifeste dans une pièce dont la coupe passant par sa ligne moyenne présente des angles rentrants vifs; danger qu'on atténue en faisant disparaître ces angles par des courbes de raccordement dites *congés*. Cela paraît venir de ce que les tranches de la partie brusquement rétrécie, les plus voisines des angles rentrants, tranches planes avant la déformation, ne restent plus telles dans l'état de flexion.

Cette explication sera plus sensible, si nous l'appliquons au cas de la simple extension d'un prisme, que nous imaginons composé de tranches matérielles, dont la distance s'accroît en vertu d'une force N uniformément répartie sur la base LL (fig. 22). Ces tranches dans l'état d'allongement restent planes, excepté dans le voisinage d'un renflement brusque qui fait que les molécules A' , A'' , B' , B'' retenues par celles qui sont situées en dehors de la surface prismatique prolongée, subissent un déplacement moindre que si cette surface terminait effectivement le corps; et comme cet effet n'a pas lieu à l'intérieur, en A et B , et que les tranches suivantes $C'C'$, $D'D'$,... restent planes, il s'ensuit que les distances $A'B'$, $B'C'$, sont plus grandes que AB et BC , et que par conséquent la tension en A' et B' par unité de surface est plus grande que la tension moyenne $\frac{N}{\Omega}$.

§ 9.

PRISME CHARGÉ PARALLÈLEMENT A SA LIGNE MOYENNE.

87. Prisme chargé suivant sa ligne moyenne. — On suppose que la force N (fig. 23) agisse au centre de gravité B de la base supérieure du prisme, que sa direction passe au centre de gravité A de la base inférieure où se trouve un point d'appui fixe. Une force momentanée a fait subir au prisme une légère flexion, et l'on demande sous quelle condition la force N pourra le maintenir fléchi et en équilibre.

Soit AB l'axe des x auquel Ay est perpendiculaire. Pour un point M quelconque de la courbe moyenne le moment μ est $-Ny$. On a donc

$$\varepsilon f''(x) = -Ny.$$

Pour en conclure l'inclinaison $f'(x)$ de la courbe, désignons-la par z . Nous avons les deux équations

$$z = \frac{dy}{dx}, \quad \text{et} \quad \varepsilon \frac{dz}{dx} = -Ny,$$

d'où, en éliminant dx ,

$$\varepsilon z dz = -Ny dy.$$

En intégrant et ajoutant une constante arbitraire nécessaire-

ment positive, on a $z^2 = N(a^2 - y^2)$, d'où en remettant pour z son égale $\frac{dy}{dx}$, on tire

$$\sqrt{\frac{N}{\varepsilon}} dx = \frac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2}},$$

ce qui s'intègre et donne

$$x \sqrt{\frac{N}{\varepsilon}} = \arcsin\left(\sin \frac{y}{a}\right) \quad \text{ou} \quad y = a \sin x \sqrt{\frac{N}{\varepsilon}},$$

sans nouvelle constante, parce que x et y sont nuls simultanément. Il faut encore que y devienne nul quand on fait $x = AB = l$ longueur du prisme. Ainsi

$$\sin\left(l \sqrt{\frac{N}{\varepsilon}}\right) = 0, \quad \text{d'où} \quad l \sqrt{\frac{N}{\varepsilon}} = n\pi,$$

c'est-à-dire un nombre entier de demi-circonférences de rayon 1. Donc

$$N = n^2 \pi^2 \frac{\varepsilon}{l^2};$$

ainsi, pour que la pièce se maintienne fléchie, il faut que N soit au moins $\pi^2 \frac{\varepsilon}{l^2}$.

Si dans la dernière expression de y on met pour $\sqrt{\frac{N}{\varepsilon}}$ sa valeur $\frac{n\pi}{l}$, l'équation de la courbe devient

$$y = a \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right),$$

de sorte que, suivant que n a les valeurs 1, 2, 3, etc., y devient nul 1 fois, 2 fois, 3 fois...., pour des valeurs de x qui ne dépassent pas l ; d'où l'on conclut que si le milieu de la pièce ne peut s'écarter de la direction AB, il faudra pour la maintenir fléchie moitié à droite et moitié à gauche, une force N quadruple de celle qui eût suffi pour la conserver fléchie au milieu si ce point eût été libre, car alors $n = 2$.

L'équation $y = a \sin \left(x \sqrt{\frac{N}{E}} \right)$ dans laquelle a est le maximum de y , fait voir que ce maximum n'est pas déterminé par l'analyse approximative précédente, et que lorsque la flexion se maintient, quoique faible, la pièce est en danger de rupture.

Exemples. — Si la section droite du prisme est un carré dont le côté est c , on a $I = \frac{1}{12} c^4$, et par conséquent $N = \frac{1}{12} n^2 \pi^2 E \frac{c^4}{l^2}$, proportionnelle à la quatrième puissance du côté c et en raison inverse du carré de la longueur l .

Si la section droite est un cercle dont le rayon est r , on a $I = \frac{1}{4} \pi r^4$ et $N = \frac{1}{4} n^2 \pi^2 E \frac{r^4}{l^2}$.

88. Règles pratiques. — La théorie précédente n'est pas propre à déterminer la charge que peut supporter un poteau ou une colonne, parce qu'un tel support n'est jamais posé sur un simple point d'appui sans résistance à la rotation, et que la base supérieure n'a pas non plus la liberté de tourner que suppose cette théorie. D'ailleurs, supposé que la valeur de N qu'elle donne soit la limite que la charge ne doit pas dépasser pour que la pièce pressée debout ne fléchisse pas, cette condition peut être insuffisante, parce qu'il faut encore que le support ne s'écrase pas, condition qui n'entre pas dans l'analyse qui précède. Aussi la formule obtenue est-elle évidemment impropre à faire

connaître la limite de la charge des supports de petite hauteur, puisqu'elle donne N aussi grand qu'on veut, en faisant l assez petit.

De nombreuses expériences ont conduit à des règles pratiques pour déterminer les charges que peuvent supporter les poteaux ou colonnes en bois ou en fonte, selon leurs dimensions.

89. Supports en bois, chêne ou sapin. — Rondelet, célèbre architecte, a cherché à déterminer par expérience la charge par unité de surface de la section qui produit la rupture d'un support à base rectangulaire. Les résultats qu'il a obtenus sont consignés dans le tableau suivant :

Rapport de la hauteur l à la plus petite dimension transversale c .	12	24	36	48	60	72
Nombres proportionnels aux charges produisant la rupture.....	20	12	8	4	2	1
Les mêmes charges exprimées en kg par cm.q.....	350	310	140	70	35	17,5

Si l'on essaye de représenter par une courbe la loi qui lie les hauteurs aux charges, en prenant les unes pour abscisses et les autres pour ordonnées, on reconnaît dans ces nombres une anomalie en ce que le deuxième point, le troisième et le quatrième sont en ligne droite, tandis que les cinq points autres que le troisième sont sur une courbe ayant une grande analogie avec un arc d'hyperbole ; et l'on trouve, en effet, que la charge par centimètre carré qui produit la rupture peut être exprimée en fonction de rapport $\frac{l}{c}$ par la formule empirique suivante :

$$\frac{24200 - 506 \frac{l}{c} + 2,74 \left(\frac{l}{c}\right)^2}{\frac{l}{c} + 40,9},$$

Qui, si l'on y fait..... $\frac{l}{c} =$	12	24	36	48	60	72
donne la charge en kg par						
cm.q..... $=$	350	210	124	70	36,6	17,5

D'après Rondelet, il est prudent de ne charger d'une manière permanente les supports en bois que du septième du poids qui produirait la rupture.

M. le général Morin cite des piliers en bois dans lesquels le rapport $\frac{l}{c}$ de la hauteur à l'équarrissage est 9,1 et qui ont supporté sans altération une charge de 72 kilogrammes, par centimètre carré. En faisant dans la formule précédente $\frac{l}{c} = 9,1$, on trouve 496, dont le septième n'est que de bien peu inférieur à cette charge.

Le même auteur mentionne des expériences desquelles M. Hodgkinson a cru pouvoir conclure une formule qui, transformée en mesures françaises, revient à celle-ci :

$$\frac{P}{c^2} = 2562 \left(\frac{c}{l} \right)^2,$$

l étant la hauteur en décimètres d'un poteau en bois de chêne à base carrée dont le côté serait c en centimètres, et P la charge en kilogrammes produisant la rupture. Or les trois seules expériences citées par M. Morin justifient peu cette loi, comme on peut le voir dans le tableau suivant :

HAUTEUR l .	COTÉ c .	CHARGE de rupture. P .	$\frac{P}{c^2}$.	$\left(\frac{l}{c} \right)^2$.	RAPPORT du 4 ^e nombre au 5 ^e .
dm. 15,87	cm. 4,45	kg. 4360	kg par c.mq. 220	0,0838	2625
11,70	3,81	3560	245	0,1060	2311
11,70	2,59	793	118	0,0490	2408

Ainsi le quotient de la division de $\frac{P}{c^2}$ par $\left(\frac{c}{l}\right)^2$ qui devrait être constant, a varié dans le rapport de 26 à 23.

90. Colonnes en fonte. — On doit encore à M. Hodgkinson des expériences sur les supports en fonte. La formule qu'il a proposée pour les colonnes cylindriques en fonte, pleines et à bases plates, revient en mesures françaises à celle-ci :

$$P = 10400 \frac{d^{3,6}}{l^{1,7}},$$

P étant la charge en kilogrammes qui produirait la rupture, d le diamètre en centimètres, l la hauteur en décimètres. Il en résulte que la charge par centimètre carré serait proportionnelle à $\frac{d^{1,6}}{l^{1,7}}$.

La vérification de cette loi, et en même temps la détermination des exposants de d et de l sont faciles. Soit en général

$$P = A \frac{d^m}{l^n}, \quad [61]$$

P , d et l étant variables, et A , m , n étant des constantes qu'il faut trouver.

En considérant une série d'expériences dans lesquelles le diamètre d est constant, on peut remplacer $A d^m$ par une constante inconnue B et poser

$$P = \frac{B}{l^n},$$

relation dont l'expression se simplifie à l'aide des logarithmes. On doit avoir

$$\log P = \log B - n \log l.$$

Cela étant, si l'on prend deux axes coordonnés dans un plan, qu'on porte en abscisses les diverses valeurs de $\log l$ pour la série d'expériences dont il s'agit, et en ordonnées les valeurs correspondantes de $\log P$, on reconnaîtra que la loi supposée est admissible, au moins pour le diamètre de la série, à ce que les points obtenus par cette construction seront approximativement sur une ligne droite. On tracera cette droite dont le coefficient angulaire et l'ordonnée à l'origine feront connaître n et $\log B$.

En opérant de même pour les diverses séries d'expériences, chaque série relative à un même diamètre, on vérifiera la loi en constatant que l'exposant n doit toujours avoir la même valeur.

Dès lors il ne reste plus que deux constantes A et m à déterminer dans la formule [61]. On la mettra sous la forme

$$\log P + n \log l = \log B = \log A + m \log d.$$

On prendra encore deux axes coordonnés, on portera en abscisses les valeurs de $\log d$ des diverses séries d'expériences, et en ordonnées les valeurs de $\log B$ correspondantes. Les points obtenus par cette construction devront être sur une ligne droite dont le coefficient angulaire et l'ordonnée à l'origine détermineront m et $\log A$.

Suivant l'opinion de M. le général Morin, la prudence exige dans la pratique que les supports ne soient pas soumis à une pression qui dépasse le sixième de la charge de rupture. La formule de Hodgkinson donnerait ainsi en kilogramme pour cette limite

$$P' = 1730 \frac{d^{2,6}}{l^{1,7}}.$$

D'après le même expérimentateur anglais, les colonnes creuses en fonte, dont les diamètres, l'un extérieur, l'autre

intérieur, sont d et d' , se rompent sous une charge P donnée par une formule qui est en mesures françaises,

$$P = 10200 \frac{d^{2,6} - d'^{2,6}}{l^{1,7}},$$

ce qui conduit à la limite pratique

$$P' = 1700 \frac{d^{2,6} - d'^{2,6}}{l^{1,7}}.$$

Il doit être entendu que ces formules ne sont applicables qu'à des piliers dont la hauteur est comprise entre 25 et 120 fois leur diamètre.

Le diamètre intérieur des supports creux est à peu près les quatre cinquièmes du diamètre extérieur.

91. Influence de l'assujettissement des bases et du renflement des colonnes. — Nous extrayons des *Leçons* de M. Morin les conclusions suivantes, que M. Hodgkinson a tirées de ses expériences :

« 1° Dans les piliers longs, à dimensions égales, la résistance à la rupture est à peu près trois fois plus grande quand les extrémités sont plates et perpendiculaires à la longueur ainsi qu'à la direction de l'effort, que lorsqu'elles sont arrondies.

« 2° Un pilier long, de dimension uniforme, dont les extrémités sont solidement fixées par des disques, des bases ou de toute autre manière, présente la même résistance à la rupture par compression qu'un pilier de même section, mais de longueur moitié moindre dont les extrémités seraient arrondies, même si l'effort était dirigé suivant l'axe.

« 3° Le renflement ou l'accroissement de diamètre des colonnes vers le milieu de leur longueur augmente seulement leur résistance de un septième à un huitième. »

92. Prisme vertical assujéti dans cette direction à son extrémité inférieure. — Ce prisme AL (fig. 24) est chargé d'un poids N à une distance donnée LC de l'extrémité L de la fibre moyenne. Soit $AL = L$, $LC = c$, $BL = f$ écartement inconnu produit par la force N . En négligeant le poids propre de la pièce dans la détermination de f , on a par la formule [41], n° 25, pour un point quelconque M de la courbe moyenne AL,

$$\varepsilon f''(x) = N(c + f - y).$$

Pour en déduire $f'(x)$, posons $f'(x) = z = \frac{dy}{dx}$, par conséquent, $\varepsilon \frac{dz}{dx} = N(c + f - y)$, d'où, en éliminant dx ,

$$\varepsilon z dz = N(c + f - y) dy,$$

et, en intégrant,

$$\varepsilon z^2 = N[2(c + f)y - y^2],$$

sans constante, attendu que y et z sont nuls ensemble. En mettant dans cette équation $\frac{dy}{dx}$ pour z , on a

$$\sqrt{\frac{N}{\varepsilon}} dx = \frac{dy}{\sqrt{2(c + f)y - y^2}},$$

d'où en intégrant

$$\sqrt{\frac{N}{\varepsilon}} x = \arccos \left(\cos \frac{\pi}{2} - \frac{y}{c + f} \right),$$

ou

$$1 - \frac{y}{c + f} = \cos \left(x \sqrt{\frac{N}{\varepsilon}} \right),$$

sans autre constante, parce que x et y sont nuls simultanément, et quant à la constante d'abord inconnue f , elle est déterminée parce qu'elle est la valeur de y qui correspond à $x = L$. Ainsi.

$$\frac{c}{c+f} = \cos \left(L \sqrt{\frac{N}{\epsilon}} \right); \text{ d'où } f = c \left[\frac{1}{\cos \left(L \sqrt{\frac{N}{\epsilon}} \right)} - 1 \right].$$

Connaissant f , on appliquera les formules [10], n° 21 en réunissant à la force N le poids P de la pièce et posant pour la section transversale en A

$$R' = \frac{N+P}{\Omega} + \frac{v'}{I} \left[N(c+f) + \frac{1}{2} P f \right]$$

ce qui suppose que f étant très-petit, la courbe AML diffère peu d'une ligne droite, et que, par conséquent, l'ordonnée parallèle à Ay de son centre de gravité est à peu près $\frac{1}{2} f$, quoique inférieure à cette quantité.

93. Solution approximative. — On peut obtenir plus simplement une solution suffisamment approchée de la question, lorsque la distance c est jugée *a priori* beaucoup plus grande que l'écartement f . Dans ce cas, en négligeant la différence $f - y$ dans la première équation, on pose

$$\epsilon f''(x) = Nc,$$

d'où

$$\epsilon f'(x) = Ncx, \text{ puis } \epsilon y = \frac{1}{2} Ncx^2,$$

par conséquent,

$$f = \frac{1}{2} \frac{N}{\varepsilon} c L^2,$$

et enfin

$$R' = \frac{N+P}{\Omega} + \frac{v'}{I} c N \left(1 + \frac{NL^2}{2\varepsilon} \right).$$

Cas particulier. — Lorsque la longueur L est assez petite pour qu'on puisse négliger $\frac{NL^2}{2\varepsilon}$ auprès de 1, et P auprès de N , l'équation se réduit à la formule [9], en y changeant le signe de N :

$$R' = \frac{N}{\Omega} + \frac{v'}{I} c N.$$

Exemple. — Supposons que la section du prisme soit un rectangle dont la dimension dans le plan de flexion soit l . On a dans ce cas $\frac{v'}{I} = \frac{6}{\Omega l}$; la formule devient

$$R' = \frac{N}{\Omega} \left(1 + \frac{6c}{l} \right),$$

et la force élastique R'' , qui répond au changement de signe de v' , se trouve

$$R'' = \frac{N}{\Omega} \left(1 - \frac{6c}{l} \right).$$

Cette seconde force devient nulle par $c = \frac{l}{6}$, et dans ce cas on a

$$R' = \frac{2N}{\Omega}.$$

Quand on a $c = \frac{1}{2} l$, de sorte que la force N est dirigée dans l'une des faces du prisme, on trouve

$$R' = 4 \frac{N}{\Omega} \quad \text{et} \quad R'' = -2 \frac{N}{\Omega}.$$

On voit combien il importe, si un prisme est chargé longitudinalement, que la direction de la résultante de la charge passe au centre de gravité du prisme.

Les formules précédentes et leurs conséquences s'appliquent aussi bien, eu égard aux signes, au cas d'extension du prisme qu'au cas de compression.

Expérience.— En éprouvant des barreaux de fonte de manière que la traction résultante fût, dans un cas, dirigée suivant l'axe de figure de la pièce, et, dans un autre cas, suivant une des faces, M. Hodgkinson a trouvé que, pour la fonte essayée, la charge de rupture était, dans le premier cas, de 12^k_g,043 par mm. q., et dans le second de 4^k_g,124. On remarquera que la théorie précédente, bien qu'elle indique la cause de ce fait, n'est pas présentée comme s'appliquant même par approximation aux cas de rupture.

§ 10.

POUTRES ARMÉES.

94. Poutre armée d'un poinçon et de deux tirants. —

Suivant l'exemple qui a été donné par M. Camille Polonceau, alors ingénieur au chemin de fer de Paris à Versailles (rive gauche), on emploie fréquemment une disposition dont le cas le plus simple est celui d'une poutre AA' (fig. 25) soutenue en son milieu B par un poinçon BC , pièce rigide, supportée elle-même à son extrémité inférieure par deux tirants AC et $A'C$, attachés aux deux bouts de la poutre.

On simplifie la théorie de la résistance de ce système, et l'on obtient des résultats suffisamment exacts pour la pratique, en considérant le poinçon et les tirants comme articulés sans frottement à leurs extrémités B , C , A et A' , et en négligeant leurs poids, très-faibles comparativement aux efforts longitudinaux que ces pièces subissent et exercent. Dès lors en appelant Q_1 la pression du poinçon, S la tension de chacun des tirants, et α l'angle ACB , on a, pour l'équilibre du boulon d'articulation en C ,

$$Q_1 = 2S \cos \alpha .$$

Si l'on admet que la poutre soit exactement prismatique, lorsqu'elle est couchée sans charge sur le chantier, et si l'on s'impose la condition que les trois points A , B et A' soient en ligne droite lorsque le système sera mis en place et soumis à

la plus grande charge qu'il ait à supporter, la force Q_1 que le poinçon exercera en B sur la poutre, est par là déterminée, ainsi que la tension des tirants. On sait (66) que dans ce cas, si la charge est uniformément répartie à raison de p kilogrammes par mètre sur la longueur L de la poutre, on a

$$Q_1 = \frac{5}{8} pL.$$

Par suite

$$S = \frac{5}{16} \frac{pL}{\cos \alpha},$$

équation servant à calculer la section transversale des tirants.

On sait de plus que, dans la poutre, le plus grand moment fléchissant est au milieu B et a pour valeur (66)

$$\mu_1 = \frac{pL^2}{32}.$$

Il en résulte que, eu égard aux composantes longitudinales des forces S qui s'exercent en A et en A', la formule [9] devenue

$$R' = \frac{v'}{I} \mu_1 + \frac{S \sin \alpha}{\Omega},$$

donne

$$R' = \frac{v'}{I} \frac{pL^2}{32} + \frac{5pL \tan \alpha}{16 \Omega}.$$

Pour prendre un exemple facile, supposons que la poutre ait sa section rectangulaire, qu'ainsi l'on ait $I = \frac{1}{12} bc^3$ et $v' = \frac{c}{2}$,

d'où $\frac{v'}{I} = \frac{6}{bc^2}$. Supposons $c = 0^m,1$; $L = 10^m$; $\tan \alpha = 5$; $R' = 6 \times 10^6$.

La dernière équation devient

$$R' = \frac{6}{bc^2} \frac{pL^2}{32} + \frac{5p \tan \alpha}{16bc},$$

d'où, d'après les données indiquées, on tire

$$\frac{p}{b} = 2\,954.$$

Si b était de 0^m,03, la charge possible par mètre de la poutre serait donc de 88^{kg},62, sans excéder la limite R' imposée.

La pression Q_1 du poinçon serait $5/8 pL = 554^{\text{kg}}$.

La tension des tirants serait

$$\frac{Q_1}{2 \cos \alpha} = \frac{277}{0,197} = 1\,413^{\text{kg}};$$

ce qui, à raison de 6^{kg} par mm. q., exigerait une section de 235 mm. q., tandis que celle de la poutre serait de

$$100 \times 30 = 3\,000 \text{ mm. q.}$$

On calculerait aisément l'économie de cette disposition comparée à une poutre non armée. Mais l'avantage serait encore plus grand si l'on utilisait les considérations exposées aux numéros 67 et 71. Le plus grand moment fléchissant pourrait être réduit dans le rapport de 0,0858 à 0,125 et la force Q_1 égale 0,586 pL au lieu de 0,625 pL . On trouverait le rapport $\frac{p}{b}$ égal à 4 184 au lieu du nombre 2 954 résultant de la première hypothèse.

95. Poutre soutenue par trois poinçons. — Prenons ici

pour sujet d'étude un arbalétrier AB (fig. 26), faisant partie d'un comble à grande portée, tel qu'on en voit dans les gares de chemins de fer. Cette pièce est soutenue par trois poinçons FC, GD, HE, qui divisent la longueur AB en quatre parties égales. Ces poinçons sont liés entre eux par les tirants rectilignes AG, GB, FD, DH. Au point B s'articule un arbalétrier symétrique et lié au premier par un *entrait* horizontal GG'.

Comme dans le cas précédent on simplifie les calculs en négligeant l'action directe de la pesanteur sur les poinçons, les tirants et l'entrait. Il ne s'agit donc que d'en connaître les pressions ou tensions, pour en conclure les conditions de résistance du système ; et d'abord nous remarquons que les réactions des poinçons en C, D et E sur l'arbalétrier peuvent être considérées comme des conséquences immédiates de la charge que subit cette pièce et de sa forme naturelle, soit rectiligne, suivant l'hypothèse du numéro 67, soit légèrement curviligne, suivant l'indication du numéro 72. Soient donc

$$\text{DONNÉES.} \left\{ \begin{array}{l} \text{La longueur } AB = L, \text{ la charge verticale représentée sur } AB = p \\ \text{L'angle de } AB \text{ avec l'horizon, } BAA' = \alpha, \\ \text{L'angle de } AB \text{ et du tirant } AG, BAG = \beta, \\ \text{Réactions normales à } AB \left. \begin{array}{l} \text{en C et E,} \\ \text{des poinçons et tirants} \end{array} \right\} \begin{array}{l} = Q_1, \\ \text{en D} = Q_2; \end{array} \end{array} \right.$$

$$\text{INCONNUES.} \left\{ \begin{array}{l} \text{Tension de l'entrait } GG', = T, \\ \text{Sommes des composantes normales des forces que} \\ \text{l'arbalétrier reçoit, en A de l'appui et du tirant} \\ \text{AG, en B de l'arbalétrier voisin et du tirant} \\ \text{BG : chacune de ces deux sommes} = Q_0, \\ \text{La pression totale longitudinale de l'arbalétrier,} \\ \text{force variable, de B en A,} = N, \\ \text{Tensions de tirants } \left\{ \begin{array}{l} F, = S, S', S'', \\ \text{aboutissant en...} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} H, = U, U', U'', \end{array} \right. \\ \text{Pression du poinçon du milieu en G} = Q. \end{array} \right.$$

La force T , qualifiée inconnue, est plutôt une indéterminée. Elle deviendrait nulle par la suppression du tirant. Mais alors la pression que l'ensemble de l'arbalétrier et de son armature exerce sur son appui en A aurait une composante rectangulaire horizontale, dite *poussée horizontale*, qui pourrait compromettre la stabilité de cet appui. Pour la calculer, remarquons qu'au point B les deux arbalétriers exercent et subissent deux pressions mutuelles non-seulement égales, mais horizontales à cause de la symétrie. Désignons par T_1 celle qui agirait sur l'arbalétrier AB, si l'entrait GG' n'existait pas. L'arbalétrier étant alors en équilibre sous l'action de la force T_1 , de la charge pL et de la réaction totale de l'appui en A, il en résulte d'abord que la force T_1 est égale à la poussée horizontale en A, parce que la réaction horizontale de l'appui, opposée et égale à cette poussée, et la force T_1 , sont les seules projections sur une horizontale des forces extérieures agissant sur l'arbalétrier. En second lieu l'équation des moments pris autour du point A (dont la distance h à l'horizontale passant par B est égale à $L \sin \alpha$) est

$$T_1 h = \frac{pL^2 \cos \alpha}{2} \quad \text{ou} \quad T_1 \tan \alpha = \frac{pL}{2},$$

d'où l'on tirerait la valeur de la poussée T_1 .

Il est bien préférable d'employer l'entrait GG' (dont nous désignons la distance au point B par b), afin d'annuler la poussée en A. Pour calculer la force T , qui dans ce cas est tout à la fois la tension de l'entrait (supposé sans poids, et la pression du second arbalétrier en B, on a, en prenant encore les moments autour de A, et en remarquant que les deux forces T forment un couple.

$$Tb = \frac{pL^2 \cos \alpha}{2}. \quad [62]$$

La tension étant ainsi déterminée, posons les équations propres à faire connaître les autres inconnues.

L'équilibre de l'arbalétrier considéré séparément de son armature, donne, entre les composantes ou projections perpendiculaires à sa direction, des forces qui le sollicitent, l'équation

$$2Q_0 + 2Q_1 + Q_2 - pL \cos \alpha = 0. \quad [63]$$

Pour obtenir une relation entre Q_0 et S , remarquons, 1° que la réaction de l'appui en A sur l'arbalétrier est pL , puisque les deux arbalétriers portent ensemble une charge verticale $2pL$; 2° que par sa définition la force Q_0 appliquée en A est la somme algébrique des projections des forces qui agissent en A sur l'arbalétrier séparé de l'armature. On a donc

$$Q_0 = pL \cos \alpha - S \sin \beta. \quad [64]$$

De même la force Q_0 appliquée en B est la somme des projections des forces T et U , exercées sur l'arbalétrier AB, par l'arbalétrier contigu et par le tirant BH. Ainsi

$$Q_0 = T \sin \alpha - U \sin \beta \quad [65]$$

Le boulon d'articulation en F est en équilibre sous l'action de la pression Q_1 dans le sens de C vers F, et sous celle des tensions S , S' et S'' . De là deux équations de projections, dont les unes parallèles à AB ont un facteur commun $\cos \beta$ qui disparaît, et les autres sont perpendiculaires à cette même direction :

$$S' + S'' - S = 0, \quad [66]$$

$$Q_1 - (S + S'' - S') \sin \beta = 0. \quad [67]$$

De même pour les forces qui concourent en H,

$$U' + U'' - U = 0, \quad [68]$$

$$Q_1 - (U + U'' - U') \sin \beta = 0. \quad [69]$$

Pour déterminer la force Q avec laquelle le poinçon GD presse en D l'arbalétrier AB , il suffit d'exprimer que la force Q_s est la somme algébrique de Q et des projections sur GD des tensions ou tractions des deux petits tirants qui aboutissent en D . Ainsi

$$Q_s = Q - (S'' + U'') \sin \beta. \quad [70]$$

On a donc neuf équations du premier degré pour calculer les neuf quantités $T, Q_0, S, U, S', S'', U', U'', Q$.

Quant aux forces Q_1 et Q_2 , si l'on suppose que l'arbalétrier est rectiligne dans son état naturel, c'est-à-dire lorsqu'il est couché sans charge dans le chantier, on admettra sans erreur notable que cette pièce mise en place, et conservant en ligne droite ses cinq points A, C, D, E, B , suit les mêmes lois dans sa flexion que si elle était posée sur cinq appuis de niveau, et soumise uniquement à une charge verticale $pL \cos \alpha$, composante perpendiculaire à AB de la force pL , l'autre composante étant $pL \sin \alpha$. Dès lors on aura (68)

$$Q_1 = \frac{2}{7} pL \cos \alpha, \quad Q_2 = \frac{13}{56} pL \cos \alpha, \quad Q_0 = \frac{11}{112} pL \cos \alpha.$$

Si au contraire on suppose qu'une légère courbure naturelle ait été donnée à l'arbalétrier, pour diminuer, autant qu'il est possible, le plus grand moment fléchissant dans l'étendue de l'arbalétrier, on posera conformément à la théorie du numéro 69

$$Q_1 = 0,293 pL \cos \alpha, \quad Q_2 = 0,207 pL \cos \alpha, \quad Q_0 = 0,104 pL \cos \alpha.$$

Les mêmes théories (68 ou 69) feront connaître le plus grand moment fléchissant.

Pour compléter le calcul de la résistance de l'arbalétrier, il reste à évaluer la force longitudinale N .

Au point B elle est la somme des projections sur BA des forces T et U . Ainsi

$$N_b = T \cos \alpha + U \cos \beta.$$

A partir de B en descendant le long de BA jusqu'à D, elle augmente de $p \sin \alpha$ pour chaque unité de longueur.

Au-dessous et près du point D elle est

$$N_d = T \cos \alpha + (U + S' - U'') \cos \beta + \frac{pL}{2} \sin \alpha.$$

Elle augmente ensuite de $p \sin \alpha$ pour chaque unité de longueur. Elle devient donc en A

$$N_A = T \cos \alpha + (U + S' - U') \cos \beta + pL \sin \alpha,$$

et devra se trouver, comme vérification de l'exactitude du calcul, égale à

$$pL \sin \alpha + S \cos \beta,$$

somme des projections sur AB de la réaction pL de l'appui, et de la traction S du tirant AF.

On a ainsi tous les éléments nécessaires pour calculer les dimensions transversales de l'arbalétrier, des poinçons, des tirants et de l'entrait.

§ 11.

FLEXION PLANE D'UNE PIÈCE COURBE.

96. Ligne moyenne. — La figure du solide dont il s'agit est telle, qu'on peut y concevoir une ligne plane continue qui contient les centres de gravité des sections normales faites dans le corps. Cette ligne moyenne a son rayon de courbure constant ou variable toujours très-grand relativement aux dimensions transversales. Suivant les conditions ordinaires dans la pratique, nous supposerons dans tout ce qui suit que le corps est symétrique relativement au plan qui contient la ligne moyenne; et qu'il en est de même des forces extérieures qui le sollicitent. Il en résulte que dans la déformation produite par ces forces, la ligne moyenne reste, comme pour tous les cas précédemment étudiés, dans ce même plan, appelé *plan de flexion*. Enfin les sections transversales qui restent perpendiculaires à ce plan sont ou toutes égales, ou ne variant que de quantités peu sensibles comparativement à la longueur de la fibre moyenne, comme on l'a vu au numéro 80.

Ici se présentent, sous une forme plus générale, les questions qui ont été traitées au paragraphe 3, pour le cas spécial d'un solide naturellement prismatique; nous avons de même à étudier, pour une pièce naturellement courbe, trois ordres de faits, savoir :

La détermination de l'effort tranchant suivant une section transversale, et des forces élastiques perpendiculaires à cette même section (nos 19 et 20);

La loi de la modification que subit la courbure de la fibre moyenne, question résolue pour une pièce droite au numéro 22;

Les changements que la déformation apporte aux coordonnées des divers points de la fibre moyenne, question traitée pour une pièce droite au numéro 25.

97. Efforts tranchants et forces élastiques longitudinales. — Il suit des hypothèses qui viennent d'être énoncées, que les généralités établies aux numéros 19 et 20 s'appliquent à une section transversale quelconque dans le voisinage de laquelle la pièce solide, sur une petite longueur, est approximativement prismatique ; de sorte que si l'on désigne par

G le point de la ligne moyenne qui est le centre de gravité de cette section,

P l'une quelconque des forces extérieures qui agissent depuis la section passant par **G** jusqu'à l'une des extrémités **L** du solide,

T la somme des projections des forces **P** sur la normale en **G** à la fibre moyenne dans le plan de flexion,

N la somme des projections rectangulaires des mêmes forces sur la tangente à la fibre moyenne en ce même point **G**,

$\Sigma \mathcal{M}_G P$ ou μ la somme des moments des forces **P** autour de l'axe mené par **G** perpendiculairement au plan de flexion,

La force **T** égale et opposée à la somme des forces élastiques subies parallèlement à la section par la partie de solide **GL** de la part de l'autre partie s'appelle l'effort tranchant des forces **P**; **N** s'appelle la tension totale du solide perpendiculairement à la section ; le moment résultant μ s'appelle le moment fléchissant des mêmes forces **P** autour de l'axe projeté en **G** sur le plan de flexion, et il est égal et opposé à la somme des moments autour du même axe des forces élastiques longitudinales reçues par la première partie de la part de la seconde ; et en appelant

i l'allongement rapporté à l'unité de longueur de la fibre moyenne près du point **G**,

V la distance de la couche des fibres neutres à ce même point,

Ω l'aire de la section,

I son moment d'inertie autour de l'axe des moments projeté en G ,

E le coefficient d'élasticité du solide,

v la distance au même axe d'une fibre quelconque traversant la section,

R la pression de cette même fibre, on a comme au numéro 20

$$i = \frac{N}{E\Omega}, \quad V = \frac{IN}{\Omega\mu}, \quad \text{et} \quad R = \frac{v\mu}{I} - \frac{N}{\Omega}.$$

98. Déplacement angulaire des sections normales de la pièce courbe. — Soit, dans l'état naturel de la pièce, ab (fig. 27) une section transversale; soit ec une autre section infiniment voisine; soit ds la distance Gg de leurs centres de gravité.

Supposons que dans l'état de flexion les molécules qui étaient primitivement en ab se trouvent en $a'b'$, et que celles de ec soient en $e'c'$. Transportons la figure $a'b'c'e'$ en abc_1c_1 . Nous voyons que la fibre moyenne élémentaire Gg a subi la variation gg_1 , qu'on peut supposer dans le prolongement de Gg en négligeant le glissement transversal.

De plus le plan c_1c_1 fait avec ec un angle infiniment petit que nous désignons par $d\psi$. C'est le *déplacement angulaire relatif* de deux sections infiniment voisines ab , ec .

Nous savons déjà que l'allongement proportionnel $\frac{gg_1}{Gg}$ de la fibre moyenne produit par les forces P est donné par la formule

$i = \frac{N}{E\Omega}$, d'où il suit que l'élément ds s'allonge de

$$\frac{Nds}{E\Omega}.$$

Quant à l'angle $d\psi$, il est égal à $\frac{ss_1}{GO}$ ou $\frac{id s}{V}$ ce qui, d'après les formules qui viennent d'être rappelées, ou mieux d'après l'équation [3] du numéro 20, donne

$$d\psi = \frac{\mu ds}{EI} = \frac{\mu ds}{\varepsilon} \quad [71]$$

équation qui se réduit, comme cela doit être, à la formule [10], $\rho = \frac{\varepsilon}{\mu}$, quand la pièce est naturellement droite, avant l'action des forces fléchissantes.

Considérons maintenant une portion de pièce courbe G_0G_1 (fig. 28) comprise entre la section faite en G_0 et l'extrémité L . Supposons non-seulement que les points G_0 et G_1 se soient transportés en G'_0 et G'_1 , mais encore que la section normale faite au premier point ait subi un déplacement angulaire ψ_0 , et désignons par ψ_1 l'angle dont a tourné sous l'action des forces la section transversale prise primitivement au point G_1 . Le déplacement angulaire relatif de la seconde section comparative-ment à la première, c'est-à-dire la quantité $G'_0C'G'_1 - G_0CG_1$, dont a varié l'angle de ces deux plans, est égal à $\psi_1 - \psi_0$, et est aussi égal à la somme des déplacements élémentaires $d\psi$ relatifs correspondants aux éléments ds dont se compose la longueur G_0G_1 . On a donc

$$\psi_1 - \psi_0 = \int_{G_0}^{G_1} \frac{\mu ds}{\varepsilon}, \quad [72]$$

étant bien entendu que pour chaque élément ds ayant son extrémité initiale au point variable G de la ligne moyenne, ε a la valeur EI qui correspond à ce point G , et μ est la somme des moments autour de l'axe projeté en G de toutes les forces exté-

rieures qui agissent depuis ce point jusqu'à l'extrémité L.

99. Variation des coordonnées des points de la ligne moyenne. — Soient x_1 et y_1 les coordonnées du point G_1 dont nous venons de parler, telles qu'elles seraient sans l'existence des forces P . Soient, dans cette même hypothèse, x_0 et y_0 les coordonnées du point G_0 . Dans l'état de flexion les coordonnées x_1 et y_1 ont varié par plusieurs causes, savoir :

I. Parce que l'origine G_0 de la partie G_0L a été très-peu déplacée;

II. Parce que la section normale passant par G_0 a tourné d'un très-petit angle ψ_0 ;

III. Parce que chacune des tranches infiniment petites dont la pièce est composée entre G_0 et G_1 a subi une double et très-petite altération d'allongement, et de déformation angulaire.

IV. Parce que le solide a pu subir une variation de température.

Pour nous rendre compte de l'effet qui résulte de chacune de ces circonstances distinctes sur les coordonnées x_1 et y_1 , supposons d'abord que la pièce dans l'intervalle de G_0 à G_1 soit restée d'une figure complètement invariable. Dans ce cas son déplacement total pourrait se décomposer en deux, savoir :

1° Une translation qui ferait que les coordonnées des différents points du solide prendraient toutes des accroissements égaux à ceux des coordonnées du point G_0 , lesquels accroissements nous désignons par Δx_0 et Δy_0 ;

2° Une rotation par laquelle la droite G_0G_1 (fig. 29) décrirait autour de G_0 un angle ψ_0 ; par conséquent le point G_1 décrirait l'arc $G_1G' = G_0G_1 \cdot \psi_0$; et les variations des coordonnées de G_1 dues à cette rotation seraient pour x_1 une diminution G_1Q , et pour y_1 un accroissement G'_1Q .

Or ces deux longueurs G_1Q et G'_1Q forment avec G_1G' un triangle infinitésimal semblable au triangle fini $G_1P_1G_0$ dans

lequel $G_1P = y_1 - y_0$ et $G_0P = x_1 - x_0$. On a donc

$$\frac{G_1Q}{y_1 - y_0} = \frac{G'_1Q}{x_1 - x_0} = \frac{G_1G'_1}{G_0G_1} = \psi_0,$$

d'où

$$G_1Q = \psi_0(y_1 - y_0) \quad \text{et} \quad G'_1Q = \psi_0(x_1 - x_0)$$

Ainsi la translation et la rotation simultanées de la section faite en G_0 entraîne, dans les coordonnées de G_1 , la réunion des très-petites variations que nous venons d'indiquer, savoir : pour l'abscisse x , l'accroissement positif ou négatif

$$\Delta x_0 = \psi_0(y_1 - y_0),$$

et pour l'ordonnée y , l'accroissement positif ou négatif

$$\Delta y_0 = \psi_0(x_1 - x_0).$$

Pour avoir égard à la troisième cause de variation des coordonnées x_1 et y_1 , voyons d'abord quelles seraient les altérations infiniment petites qu'elles subiraient, si, de toutes les tranches élémentaires comprises entre G_0 et G_1 , une seule, dont l'épaisseur moyenne primitive est ds , commençant au point G dont les coordonnées sont x et y , s'était déformée en vertu des forces qui agissent entre G et L , et produisent tout à la fois un accroissement de longueur de la fibre moyenne et un accroissement de l'angle des deux bases de cette tranche.

D'une part, la longueur ds , étant augmentée de $\delta ds = \frac{N ds}{E \Omega}$, aurait ses projections sur les axes Ox et Oy augmentées respectivement de

$$\frac{N \cos \alpha \, ds}{E \Omega} \quad \text{et} \quad \frac{N \sin \alpha \, ds}{E \Omega},$$

α désignant l'angle que fait avec l'axe Ox la tangente à la fibre moyenne au point G ; et ces augmentations en produiraient deux égales pour les coordonnées x et y .

D'autre part, à cause du déplacement angulaire relatif $d\psi$ des deux bases de la tranche, ces mêmes ordonnées subiraient, comme on vient de le voir pour ψ_0 , les variations

$$-d\psi(y, -y) \quad \text{et} \quad d\psi(x, -x),$$

qui, d'après la valeur de $d\psi$ donnée par la formule [71], sont égales respectivement à

$$-(y, -y) \frac{\mu ds}{\varepsilon} \quad \text{et} \quad (x, -x) \frac{\mu ds}{\varepsilon}$$

Ainsi l'allongement de l'arc élémentaire ds , et l'altération de l'angle des deux sections normales successives produiraient ensemble pour l'abscisse x l'accroissement

$$\frac{N \cos \alpha ds}{E \Omega} - (y, -y) \frac{\mu ds}{\varepsilon},$$

et pour l'ordonnée y l'accroissement

$$\frac{N \sin \alpha ds}{E \Omega} + (x, -x) \frac{\mu ds}{\varepsilon}.$$

Concluons que pour avoir les variations totales de x et de y , dues aux déformations analogues produites par les forces P dans toutes les tranches occupant l'intervalle de G_0 à G_1 , il ne reste qu'à intégrer, de l'une à l'autre de ces limites, les deux expressions différentielles que nous venons d'établir.

Enfin, comme nous l'avons dit, une quatrième altération des coordonnées x , et y , peut provenir de la variation de la tempé-

rature, tandis que les forces extérieures P sont supposées rester les mêmes. En désignant par τ un coefficient de dilatation linéaire, proportionnel à la variation de température, et en remarquant que le corps ne subit dans son ensemble qu'un faible déplacement, on voit qu'il suffit, pour tenir compte des effets de la chaleur, d'écrire que les projections $x_1 - x_0$ et $y_1 - y_0$ sont augmentées de $\tau(x_1 - x_0)$ et de $\tau(y_1 - y_0)$.

En réunissant aux effets des déplacements de la section normale en G_0 ceux du changement de température et ceux que produisent les déformations de toutes tranches, depuis le point (x_0, y_0) jusqu'au point (x_1, y_1) , on obtient les deux formules suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_1 &= \Delta x_0 - (y_1 - y_0) \psi_0 + (x_1 - x_0) \tau \\ &+ \int_{G_0}^{G_1} \left[\frac{N \cos \alpha}{E \Omega} + y \frac{\mu}{\varepsilon} \right] ds - y_1 \int_{G_0}^{G_1} \frac{\mu}{\varepsilon} ds \end{aligned} \right\} \quad [73]$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta y_1 &= \Delta y_0 + (x_1 - x_0) \psi_0 + (y_1 - y_0) \tau \\ &+ \int_{G_0}^{G_1} \left[\frac{N \sin \alpha}{E \Omega} - x \frac{\mu}{\varepsilon} \right] ds + x_1 \int_{G_0}^{G_1} \frac{\mu}{\varepsilon} ds. \end{aligned} \right\} \quad [74]$$

100. Interprétation des formules précédentes. — Le langage scientifique et précis dans lequel ces relations sont exprimées pourrait faire croire que, pour être en état de les utiliser dans les questions que présente la pratique, il faudrait être assez profondément versé dans l'analyse infinitésimale, tandis qu'une connaissance exacte mais élémentaire des procédés de quadrature approximative est tout à fait suffisante.

Pour indiquer la marche à suivre dans l'application la plus directe de ces formules, supposons que la courbe moyenne G_0L soit donnée dans l'état naturel; que le point G_0 reste fixe après l'application des forces P qui doivent déformer le solide; que

toutes ces forces soient données, ainsi que la direction de la tangente au point G_0 . Dans ce cas on aura $\Delta x_0 = 0$ et $\Delta y_0 = 0$ pour exprimer l'invariabilité du point G_0 , et $\psi = 0$ à cause de celle de la tangente en ce point. En outre, commençons par faire abstraction de la variation de la température, en posant $\tau = 0$ (rien ne sera plus facile que d'avoir ultérieurement égard à cette cause de dilatation ou de contraction générale).

Supposons qu'on veuille connaître les variations que subiront les coordonnées, non-seulement d'un point G_n (qui peut être l'extrémité L), mais encore de quelques points intermédiaires, entre G_0 et G_n .

Il faudra pour cela calculer les intégrales qui entrent dans les formules [73] et [74] depuis le point G_0 jusqu'à ces divers autres points. Pour le faire d'une manière commode par les méthodes d'approximation connues, le mieux sera de diviser l'arc $G_0 G_n$ en un nombre pair et suffisant de parties égales.

Pour chaque point de division G , dont les coordonnées sont x et y , on calculera la section Ω et le moment d'inertie I , d'où l'on conclura les produits $E\Omega$ et EI ou ϵ . On calculera pour le même point G la force N , somme des projections sur la tangente en G (prise positivement dans le sens allant de G vers L), des forces qui, parmi les forces P , agissent depuis ce point jusqu'à l'extrémité L inclusivement; puis on multipliera cette somme N par le cosinus de l'angle α que fait la même tangente avec l'axe Ox : on aura ainsi, pour le point de division G , la quantité $N \cos \alpha$ qu'on divisera par $E\Omega$.

Pour le même point encore, on calculera le moment μ , somme des moments autour de G des mêmes forces P agissant depuis G jusqu'à L . On divisera cette somme μ par la valeur de ϵ qui correspond au point G , et le quotient multiplié par l'ordonnée y de ce point G sera le second terme de la fonction qui multiplie ds sous le premier signe \int de la formule [73].

Cela fait pour les points G_0 et G_n et pour chacun des points

de division intermédiaires, on pourra se représenter graphiquement la signification de la première intégrale de la formule [73]. Pour cela, on portera sur une droite, axe des arcs s rectifiés, la longueur développée de l'arc $G_0 G_n$ avec ses subdivisions. A chaque point extrême ou de division on portera (en ordonnée, positive ou négative, moyennant une échelle convenable, la valeur de $\frac{N \cos \alpha}{EQ} + y \frac{\mu}{\varepsilon}$ calculée pour ce point. On joindra par une courbe les extrémités des ordonnées ainsi déterminées, et l'aire comprise entre l'axe des abscisses s , la courbe, l'ordonnée initiale répondant au point G_0 et une ordonnée quelconque répondant à un autre point de division G_1 , représentera l'intégrale

$$\int_{G_0}^{G_1} \left(\frac{N \cos \alpha}{EQ} + y \frac{\mu}{\varepsilon} \right) ds,$$

et se calculera approximativement par la formule de T. Simpson.

On construira sur les mêmes abscisses la courbe dont les ordonnées seront $\frac{\mu}{\varepsilon}$, et l'aire analogue à la précédente donnera

$\int_{G_0}^{G_1} \frac{\mu}{\varepsilon} ds$; après l'avoir calculée, on la multipliera par y_1 , c'est-à-dire par l'ordonnée du point G_1 pris sur la courbe donnée $G_0 L$; et en retranchant le produit, de la première aire ou intégrale calculée, on aura la variation Δx_1 de l'abscisse du point G_1 par l'effet des forces P .

Pour avoir la variation analogue de l'abscisse, soit du point extrême G_n , soit d'un autre point intermédiaire, on n'aura plus à construire de nouvelle courbe. Seulement les deux aires des courbes déjà construites, au lieu de n'être prises qu'à jusqu'à G_1 , seront prises jusqu'à un autre point G_2 , et la seconde aire de G_0 à G_2 , dont la notation est $\int_{G_0}^{G_2} \frac{\mu}{\varepsilon} ds$, sera multipliée par l'ordonnée du point G_2 de la courbe $G_0 L$.

Les calculs et constructions analogues seront faits pour appliquer la formule [74] à la détermination des variations Δy , des ordonnées de cette courbe.

A la rigueur, pour calculer les quantités N , μ , $\cos \alpha$, $\sin \alpha$, x et y , qui entrent comme variables dans les formules [73] et [74], il faudrait avoir égard à la figure du solide *après* sa déformation; mais, attendu que celle-ci est toujours très-faible, on peut, sans erreur notable, supposer aux points d'application des forces les positions qu'ils auraient si le corps conservait sa figure primitive, pourvu qu'on attribue aux forces les valeurs données ou inconnues qu'elles ont après la déformation. C'est ce qu'on va comprendre par les exemples qui suivent.

101. Recherche des réactions des appuis et des inclinaisons initiales. Premier cas. — *Pièce courbe quelconque reposant simplement sur deux appuis G_0 et L* (fig. 30). Prenons l'axe des x parallèle à G_0L . Désignons par Q et S et par Q' et S' les composantes rectangulaires des réactions des appuis, auxquelles nous supposons les directions qu'indique la figure. Soit $G_0L = a$, soit α l'angle que fait la ligne moyenne au point (x, y) avec l'axe Ox , et appelons P l'une quelconque des forces extérieures indépendantes des appuis.

La statique donne les trois équations

$$Q' - Q + \Sigma P_x = 0, \quad S' + S - \Sigma P_y = 0, \quad \Sigma M_{G_0} P - Sa = 0.$$

Lorsque les forces P sont toutes verticales et la droite G_0L horizontale, Q et Q' sont égales et opposées; lorsque les sommes des moments des forces P autour de G_0 et autour de L sont égales, les forces S et S' sont égales entre elles, et par conséquent chacune a pour valeur $\frac{1}{2} \Sigma P_y$. Dans tous les cas, les deux dernières équations déterminent S et S' ; la première donne seulement la différence $Q' - Q$. Pour avoir une quatrième

équation, il faut écrire que G_0L est invariable, et qu'ainsi le point L étant pris pour celui dont les coordonnées ont été précédemment désignées par x_1 et y_1 , les forces doivent être telles, qu'on ait $\Delta x_1 = 0$, comme on a $\Delta x_0 = 0$ et $\Delta y_0 = 0$. L'équation [73] où l'on fait de plus $y_1 - y_0 = 0$ et $x_1 - x_0 = a$, se réduit à

$$\tau a + \int_{0.}^L \left[\frac{N \cos \alpha}{E\Omega} - (y_0 - y) \frac{\mu}{\varepsilon} \right] ds = 0,$$

équation qui ne renferme en réalité d'autre inconnue que Q . Pour mettre celle-ci en évidence, réservons à N et μ leur signification pour les forces P et S , c'est-à-dire pour toutes les forces extérieures autres que Q ; il suffira d'ajouter à N le terme $-Q \cos \alpha$ et à μ le terme $Q(y_0 - y)$, de sorte que l'équation devient

$$\begin{aligned} \tau a + \int_{0.}^L \left[\frac{N \cos \alpha}{E\Omega} - (y_0 - y) \frac{\mu}{\varepsilon} \right] ds, \\ -Q \int_{0.}^L \left[\frac{\cos^2 \alpha}{E\Omega} + \frac{(y_0 - y)^2}{\varepsilon} \right] ds = 0, \end{aligned}$$

d'où l'on tirera la valeur de Q .

Connaissant ainsi toutes les forces extérieures, on peut appliquer pour une section quelconque les formules du numéro 97, et se servir de la formule [72] du numéro 98 pour calculer la variation de l'angle des deux sections extrêmes.

Mais si l'on veut connaître la déformation de la ligne moyenne G_0GL ou le déplacement d'un quelconque G_1 de ses points, il faut d'abord obtenir le déplacement angulaire ψ_0 que les forces ont produit à l'origine G_0 , en supposant que la pièce soit simplement posée en ce point, ce qui est l'hypothèse du cas actuel. A cet effet il suffit d'écrire que pour le point L la variation

Δy est nulle; ainsi en faisant dans la formule [74] $\Delta y_1 = 0$ et $y_1 = y_0$, et en prenant pour plus de simplicité l'origine O de manière que l'on ait $x_0 = 0$, et par suite $x_1 = a$, on a pour déterminer ψ_0 l'équation

$$a\psi_0 + \int_0^a \left[\frac{N \sin \alpha}{E\Omega} + (a-x) \frac{\mu}{\varepsilon} \right] ds = 0,$$

dans laquelle N et μ variables comprennent toutes les forces extérieures et par conséquent les termes dus aux forces Q et S tant comme projections que comme moments; c'est ce qu'on peut indiquer ainsi :

$$N = \Sigma P \cos (P, ds) - S \sin \alpha - Q \cos \alpha$$

et

$$\mu = \Sigma \mathcal{M}_0 P - S(a-x) + Q(y_0 - y).$$

ψ_0 étant connu, toutes les quantités des seconds membres des équations [73] et [74] (dans lesquelles N et μ sont les mêmes fonctions qui viennent d'être formulées) sont calculables au moins par approximation, et l'on peut trouver les changements des coordonnées d'un point quelconque de la ligne moyenne.

102. Deuxième cas. — *Pièce symétrique et symétriquement chargée reposant simplement sur deux appuis.* Ce cas est compris dans le précédent, mais les calculs se simplifient. Prenons l'origine au sommet G_0 (fig. 31). On a d'abord $S = \Sigma P_y$, cette somme ne s'étendant qu'au demi-arc G_0L . Pour trouver Q , on fait dans l'équation [73], $x_1 = AL = a$, $y_1 = AG_0 = f$, $x_0 = 0$, $\Delta x_0 = 0$, $\Delta x_1 = 0$, ce qui donne, en mettant en évidence les termes où entre Q et conservant à N et μ leur signification pour

les autres forces P et S ,

$$\begin{aligned} 0 &= \tau a + \int_{c_0}^L \left[\frac{N \cos \alpha}{E\Omega} - (f-y) \frac{\mu}{\epsilon} \right] ds, \\ -Q &\int_{c_0}^L \left[\frac{\cos^2 \alpha}{E\Omega} + \frac{(f-y)^2}{\epsilon} \right] ds, \end{aligned}$$

d'où l'on tirera Q .

S et Q étant connues et ψ_0 étant nul à cause de la symétrie, la détermination des diverses valeurs de μ , des pressions R , et des changements subis par les coordonnées des divers points de la courbe moyenne (y compris le point L , dont l'ordonnée f relative à l'axe G_0x change par l'effet des forces), s'achève comme précédemment au moyen des équations [72] et [73].

103. Troisième cas. — *Pièce reposant simplement sur deux appuis de niveau G_0 et L , dont le second L ne peut exercer qu'une réaction verticale.* En d'autres termes, l'arc repose en L sur un plan horizontal sans frottement. La figure et les notations étant les mêmes qu'au premier cas, la force Q est nulle et les réactions des appuis sont déterminées par les équations d'équilibre

$$Q' + \Sigma P_x = 0, \quad S + S' - \Sigma P_y = 0 \quad \text{et} \quad \Sigma \mathcal{M}_{G_0} P - Sa = 0.$$

Les deux équations [73] et [74] s'appliquent d'abord à la courbe entière, en y faisant $\Delta x_0 = 0$, $\Delta y_0 = 0$, et $\Delta y_1 = 0$; il n'y reste plus que deux inconnues ψ_0 et Δx_1 . Les calculs s'achèvent comme dans le premier cas.

104. Quatrième cas. — *Pièce encastree à ses deux extrémités.* Si cette pièce n'est pas symétrique, il faut considérer les réactions des deux appuis. Les forces extérieures provenant de l'appui L peuvent toujours se réduire à deux forces S et Q rec-

tangulaires (fig. 30), et à un couple dont le moment est également inconnu. Désignons-le par μ_1 et prenons-le positif s'il tend à produire une rotation dans le sens qui va de Ox vers Oy . Les forces extérieures qui proviennent de l'appui G_0 se réduisent de même à deux forces S' et Q' , et à un couple μ_0 que nous supposerons de sens contraire à celui du premier. Entre ces six inconnues, la statique nous fournit trois équations

$$S' + S - \Sigma P_y = 0, \quad Q' - Q + \Sigma P_x = 0,$$

$$\Sigma \mathcal{M}_{G_0} P - Sa + \mu_1 - \mu_0 = 0.$$

Pour en obtenir trois autres, nous écrivons : 1° que le déplacement angulaire relatif des deux normales extrêmes est nul, et que par conséquent l'équation [72] du numéro 98 donne, en mettant en évidence les inconnues,

$$\int_{c_0}^L \frac{\mu}{\varepsilon} ds - S \int_{c_0}^L \frac{(a-x)}{\varepsilon} ds + Q \int_{c_0}^L \frac{(y_0-y)}{\varepsilon} ds + \mu_1 \int_{c_0}^L \frac{ds}{\varepsilon} = 0;$$

2° que la variation Δx , supposée celle du point L est nulle aussi bien que Δx_0 et ψ_0 ; qu'ainsi l'équation [73] donne

$$\left. \begin{aligned} & \tau a + \int_{c_0}^L \left[\frac{N \cos \alpha}{E\Omega} - (y_0 - y) \frac{\mu}{\varepsilon} \right] ds \\ & - Q \int_{c_0}^L \left[\frac{\cos^2 \alpha}{E\Omega} + \frac{(y_0 - y)^2}{\varepsilon} \right] ds \\ & - S \int_{c_0}^L \left[\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{E\Omega} - \frac{(y_0 - y)(a - x)}{\varepsilon} \right] ds \\ & - \mu_1 \int_{c_0}^L \frac{(y_0 - y) ds}{\varepsilon} \end{aligned} \right\} = 0;$$

3° que la variation Δy , appliquée au même point est aussi nulle, et qu'ainsi l'équation [74] donne

$$\left. \begin{aligned} & \int_{c_0}^L \left[\frac{N \sin \alpha}{E \Omega} + (a-x) \frac{\mu}{\varepsilon} \right] ds \\ & - Q \int_{c_0}^L \left[\frac{\cos \alpha \sin \alpha}{E \Omega} - \frac{(a-x)(y_0-y)}{\varepsilon} \right] ds \\ & - S \int_{c_0}^L \left[\frac{\sin^2 \alpha}{E \Omega} + \frac{(a-x)^2}{\varepsilon} \right] ds \\ & + \mu_1 \int_{c_0}^L \frac{(a-x) ds}{\varepsilon} \end{aligned} \right\} = ds.$$

Ainsi la détermination des inconnues S , Q et μ_1 s'obtient par le calcul d'un certain nombre d'intégrales définies dépendantes des données, et par la résolution de trois équations du premier degré. Cette détermination faite, les questions s'achèvent comme au premier cas.

Si la pièce était symétrique et symétriquement chargée, les calculs se simplifieraient comme au deuxième cas.

§ 12.

RÉSISTANCE DES VASES CYLINDRIQUES PRESSÉS UNIFORMÉMENT.

105. Profil exactement circulaire. Tension suivant ce profil. — Soient ρ et ρ' les rayons, l'un intérieur, l'autre extérieur, d'un vase cylindrique d'une longueur supposée très-grande. Soient p et p' les pressions constantes par mètre carré, l'une intérieure, l'autre extérieure. Ces pressions sont produites par des gaz, et nous négligeons toutes les autres forces, poids propre du vase et du liquide qu'il peut contenir, réactions de ses appuis et de ses fonds circulaires.

Un plan quelconque passant par l'axe des cylindres concentriques coupe le vase suivant deux bandes dans lesquelles la tension ou la pression est uniformément répartie, parce que le vase restant cylindrique à cause de la symétrie des causes déformatrices, toutes les tranches normales dont il est composé ne subissent aucune flexion. De la formule [74] du numéro 98,

$d\psi = \frac{\mu ds}{\epsilon}$, où il faut faire $d\psi = 0$, il résulte $\mu = 0$, et de la

formule $R = \frac{v\mu}{I} - \frac{N}{Q}$, où il faut faire $\mu = 0$, résulte $R' = \frac{N}{Q}$

tension constante indépendante de v . La résistance qu'une des moitiés du vase exerce sur l'autre est exprimée pour un mètre de longueur parallèle à l'axe par $2(\rho' - \rho) R'$, et elle est égale et opposée à la résultante des pressions exercées normalement aux deux surfaces de l'autre demi-vase, résultante qui, d'après

une propriété démontrée en hydrostatique, est $2\rho p - 2\rho'p'$.

On a donc

$$(\rho' - \rho)R' = \rho p - \rho'p',$$

en observant que R' est une tension proprement dite par unité de surface, si le second membre est positif et que par conséquent la pression intérieure p l'emporte sur l'autre. Dans le cas contraire, R' quantité négative exprime une pression.

Si l'on représente par e l'épaisseur $\rho' - \rho$, l'équation devient

$$eR' = \rho(p - p') - ep'.$$

Ordinairement, et notamment lorsqu'il s'agit de chaudières à vapeur en tôle, la quantité p' est petite comparativement à R' , de sorte que l'équation peut se réduire à

$$eR' = \rho(p - p'). \quad [75]$$

La formule par laquelle l'ordonnance royale du 22 mai 1843 a fixé la moindre épaisseur des chaudières à vapeur, dans le cas où la plus grande pression est à l'intérieur, est

$$e = 0,0018 nd + 0^m,003,$$

n étant la différence des pressions exprimées en atmosphères, et d le diamètre intérieur rapporté au mètre. Le terme $0^m,003$ a été ajouté afin de pourvoir à l'usure de la chaudière, et abstraction faite de ce terme, on reconnaît, par la comparaison des deux dernières équations, en faisant $d = 2\rho$ et $p - p' = 10330 n$, que le coefficient 0,0018 a été déterminé en adoptant pour R' le maximum 2870000, à peu près moitié de celui qu'on aurait pu admettre si la paroi d'une chaudière ne présentait par une réduction considérable de résistance à l'endroit

où les feuilles de tôle qui la composent sont assemblées, et si elle n'était pas tendue en tous sens.

Quant aux chaudières ou tuyaux à vapeur pressés du dehors en dedans, l'ordonnance de 1843 porte que l'on emploiera pour leur construction une tôle d'une plus grande épaisseur, et qu'ils seront en outre munis d'armatures. Une instruction ministérielle du 17 décembre 1848 exige que, dans ce cas, l'épaisseur de la tôle soit une fois et demie celle qui résulte de la formule précédente, et elle indique comme le meilleur mode d'armature à essayer l'emploi d'anneaux en fer forgé concentriques au tuyau à renforcer. Nous verrons tout à l'heure la raison de cette différence de prescription.

106. Tension suivant la longueur du cylindre. — Si l'on partage le vase en deux parties par un plan perpendiculaire aux génératrices rectilignes, la tension par unité de surface dans le sens longitudinal étant représentée par R'' , et l'épaisseur e étant très-petite comparativement au rayon ρ , on voit que la tension totale entre les deux parties considérées est très-approximativement $2\pi\rho eR''$. D'une autre part, la résultante des pressions qui s'exercent intérieurement et extérieurement sur l'un des fonds du vase, quel que soit son bombement, est $\pi\rho^2(p-p')$. On a donc pour l'équilibre

$$2\pi\rho eR'' = \pi\rho^2(p-p'), \text{ d'où } R'' = \frac{\rho(p-p')}{e} = \frac{1}{2}R'.$$

Le danger d'une rupture est donc bien moindre suivant une section droite que suivant une génératrice rectiligne.

107. Cas d'un profil faiblement elliptique. Recherche du moment fléchissant. — Considérons une portion du vase cylindrique comprise entre deux sections droites dont la distance perpendiculaire au plan de la figure soit égale à l'unité de lon-

gueur. Soit $A_0B_0A_1B_1$ (fig. 32) la fibre moyenne elliptique de la pièce courbe ainsi séparée du vase entier. Chacun des plans projetés suivant les droites A_0A_1 et B_0B_1 diamètres principaux, partage cette pièce en deux parties symétriques quant à la figure et quant aux forces, d'où il suit que les résultantes des forces que l'une des parties exerce sur l'autre, et qui traversent les sections faites normalement à la fibre moyenne en A_0 et A_1 , en B_0 et en B_1 sont, par suite nécessaire de cette symétrie, perpendiculaires à ces sections, puisque les réactions qui leur correspondent doivent à la fois leur être opposées, et symétriques relativement à ces mêmes sections.

Cela posé, considérons la partie du solide en équilibre dont la fibre moyenne est l'arc B_0A_1 . Faisons $OA_1 = a$ suivant l'axe des x et $OB_0 = b$ suivant l'axe des y , et représentons par p la différence constante entre la pression intérieure et la pression extérieure par unité de surface; la résultante des forces élastiques que la partie indiquée reçoit de la partie A_1B_1 est dans le sens des y négatifs et égale à pa . Quel que soit son point de passage dans le plan OA_1 à une distance δ à gauche du point A_1 , appelons μ_1 son moment autour de l'axe projeté en A_1 ; ainsi $pa\delta = \mu_1$.

Proposons-nous de trouver cette quantité inconnue μ_1 et l'expression du moment fléchissant μ variable et correspondant à un point G quelconque dont les coordonnées OH et HG sont x et y .

Pour cela il nous suffit de faire usage de la formule [72], en posant

$$\psi_1 - \psi_0 = \int_{B_0}^{A_1} \frac{\mu ds}{\varepsilon} = 0, \quad [76]$$

attendu que cette intégrale définie est nulle, parce que l'angle B_0OA_1 est droit aussi bien après qu'avant la déformation de l'ellipse.

La variable μ se compose de la somme des moments des pressions élémentaires qui agissent de G en A_1 et du moment

de la réaction pa dont nous venons de parler. La première somme est égale à celle des moments des pressions qui s'exerceraient à raison de p par mètre sur les deux plans GH et HA; cette première somme est donc $py \cdot \frac{y}{2} + p(a-x) \frac{a-x}{2}$, le sens positif des moments étant comme à l'ordinaire celui de la rotation de l'axe Ox vers Oy . Le moment de la réaction pa est $-pa(a-x-\delta)$ ou $-pa(a-x) + \mu_1$.

En ajoutant et réduisant, nous trouvons

$$\mu = \frac{1}{2}p(y^2 + x^2 - a^2) + \mu_1. \quad [77]$$

D'ailleurs l'équation de l'ellipse est

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2;$$

on en conclut, en éliminant y^2 ,

$$\mu = \frac{p(a^2 - b^2)}{2a^2}(x^2 - a^2) + \mu_1. \quad [78]$$

Substituons dans l'équation [76], qui, parce que ϵ est constant, se réduit à $\int \mu ds = 0$: nous obtenons, en appelant L la longueur B_0A_1 ,

$$\frac{p(a^2 - b^2)}{2a^2} \left[\int_{B_0}^{A_1} x^2 ds - a^2 L \right] + \mu_1 L = 0. \quad [79]$$

$\int x^2 ds$, moment d'inertie de l'arc B_0A_1 autour de l'axe OB , diffère très-peu de ce qu'il serait si l'arc B_0A_1 était un quart de circonférence ayant a pour rayon. Dans ce cas, on a

$$\int x^2 ds = \frac{1}{2} \left(\int x^2 ds + \int y^2 ds \right) = \frac{1}{2} \int a^2 ds = \frac{1}{2} a^2 L.$$

L'équation [79] donne donc approximativement

$$\mu_1 = \frac{1}{4} p (a^2 - b^2),$$

et par suite, l'expression [78] du moment fléchissant μ autour du point quelconque G, devient

$$\mu = \frac{1}{4} p \frac{a^2 - b^2}{a^2} (2x^2 - a^2). \quad [80]$$

Cette quantité croît algébriquement avec x depuis le point B₀ où elle est négative et égale à $-\frac{1}{4} p (a^2 - b^2)$, jusqu'au point A₁ où elle est positive et de même valeur absolue, en passant par zéro au point où $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$, tout près du milieu de l'arc B₀A₁.

108. Tensions parallèlement à la fibre moyenne. — Cherchons en général la pression R , en un point situé dans la section normale au point quelconque G, par la formule [9] du numéro 20. Il faut y faire : $\Omega = e$ l'épaisseur, attendu que

l'autre dimension de la section normale est 1 ; $I = \frac{1}{12} e^3$; N

une quantité très-peu variable, entre $p a$ au point A₁ et $p b$ au point B₀, v la distance, à la fibre moyenne, du point où l'on considère la pression R dans la section normale de la pièce courbe. Par conséquent, pour avoir la plus grande valeur R' de la tension, nous faisons $v = -\frac{1}{2} e$, en remplaçant R par $-R'$. Nous avons ainsi, pour la tension par unité de surface près de A₁, où $x = a$,

$$R' = \frac{p a}{e} + \frac{3}{2} \frac{p (a^2 - b^2)}{e^2} = \frac{p a}{e} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{a^2 - b^2}{a e} \right). \quad [81]$$

Cette formule, qui coïncide avec celle du numéro 105, [75] dans le cas où la section droite du vase est exactement circulaire, a été donnée par M. Bresse dans son Cours à l'Ecole des ponts et chaussées.

Il importe de remarquer que a et b sont les dimensions supposées existantes sous l'action des forces déformatrices, ce qui montre l'utilité de la recherche supplémentaire suivante.

109. Déformation du profil elliptique. — Supposant que la pression p soit du dehors en dedans, nous cherchons la variation que subit le demi-diamètre principal dont la valeur initiale est représentée par a_0 , sa valeur finale restant désignée par a . Nous employons pour cela la formule [73] (99) que nous appliquons à l'arc B_0A_1 et dans laquelle nous devons faire

$$\Delta x_1 = a - a_0, \Delta x_0 = 0, \psi_0 = 0, \tau = 0, N = -p \frac{(a+b)}{2},$$

valeur moyenne approximative, $\Omega = e$, $\varepsilon = EI = \frac{1}{12} Ee^3$,

$y_1 = 0$, et enfin $\mu = \frac{1}{4} p \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2} \right) (a^2 - 2x^2)$, le signe de l'expression [81] devant être changé à cause du changement du sens de la pression p . Nous avons ainsi, en remplaçant $\cos \alpha$ ds par dx

$$\begin{aligned} a - a_0 &= \int_0^a \frac{N dx}{Ee} + \frac{12}{Ee^3} \int_{x_0}^{x_1} y \mu ds \\ &= - \frac{p a (a+b)}{2Ee} + \frac{3p (a^2 - b^2)}{Ee^3 a^2} \int_{x_0}^{x_1} (a^2 - 2x^2) y ds. \end{aligned}$$

Si la courbe B_0A_1 était un cercle de rayon a , $y ds$ serait égal à $a dx$; si le rayon était b , $y ds$ serait $b dx$; on ne fera qu'une erreur peu sensible en posant $y ds = \frac{1}{2} (a+b) dx$, de sorte

qu'on a approximativement

$$\begin{aligned}\int_{b_0}^{a_1} (a^2 - 2x^2) y ds &= \frac{1}{2} (a + b) \int_0^a (a^2 - 2x^2) dx \\ &= \frac{1}{6} (a + b) a^3.\end{aligned}$$

Il en résulte

$$a - a_0 = \frac{1}{2} (a + b) \frac{p a}{Ee} \left(\frac{a^2 - b^2}{e^2} - 1 \right). \quad [82]$$

La variation analogue $b - b_0$ s'obtient en remplaçant a par b , et *vice versa* :

$$b - b_0 = -\frac{1}{2} (a + b) \frac{p b}{Ee} \left(\frac{a^2 - b^2}{e^2} + 1 \right). \quad [83]$$

Pour appliquer ces formules à un exemple, prenons une chaudière à foyer intérieur dont le diamètre moyen est de 1 mètre, qui doit supporter du dehors en dedans une pression de 40 000 kg. par m. q., ou environ 4 atmosphères, et dont l'épaisseur, qui, dans le cas où la pression serait intérieure, devrait être de 0^m,01, a été portée à 0^m,015. Nous ferons d'ailleurs $E = 2 \times 10^{10}$. Nous admettrons que le diamètre moyen de 1 mètre est celui qui a lieu sous l'action de la pression.

D'après ces données, on a

$$\begin{aligned}a + b &= 1, \quad a^2 - b^2 = a - b = 2a - 1 = 1 - 2b, \\ \frac{p}{2Ee^3} &= \frac{1}{3,375},\end{aligned}$$

et les équations [82] et [83] se réduisent à

$$a^2 - 2,1876 a + 1,6875 a_0 = 0, \quad [84]$$

$$b^2 - 2,1876 b + 1,6875 b_0 = 0. \quad [85]$$

Il ne reste plus qu'à se donner la valeur de l'une des dimensions initiales a_0 et b_0 . Soit, par exemple, $a_0 = 0,507$; de l'équation [84] on tire en conséquence $a = 0^m,510$; par suite.

$b = 1 - 0,510 = 0^m,490$; enfin l'équation [85] après la substitution de cette dernière valeur de b , donne $b_0 = 0,493$. Ainsi les demi-diamètres, qui, dans l'état primitif, sont $0^m,507$ et $0^m,493$, deviennent, par l'effet de la pression, $0^m,510$ et $0^m,490$, valeurs qui, substituées dans la formule [81] (108) avec les données précédemment indiquées, produisent

$$R = \frac{p a}{e} \left(1 + \frac{3 \times 0,02}{2 \times 0,51 \times 0,015} \right) \\ = 1\ 360\ 000 (1 + 3,92) = 6\ 691\ 200 ,$$

c'est-à-dire que cette pression est près de cinq fois plus grande que celle qui aurait lieu si le vase était rigoureusement cylindrique.

Appliquons la même théorie au cas où $a + b$ restant 1 mètre, la pression de 40 000 kg. par m. q. serait intérieure et l'épaisseur de $0^m,01$. Les équations [82] et [83] deviennent alors, eu égard au changement de signe de p ,

$$a^2 - 0,0000\ 5\ a - 0,5\ a_0 = 0 ,$$

$$b^2 - 0,0000\ 5\ b - 0,5\ b_0 = 0 ;$$

et en faisant comme tout à l'heure $a_0 = 0,507$, on trouve $a = 0,503$; $b = 0,497$ et $b_0 = 0,493$. Les demi-diamètres, qui, dans l'état primitif, sont, comme dans le cas précédent, $0,507$ et $0,493$, deviennent donc $0,503$ et $0,497$; de sorte que l'excentricité diminue. Ces dernières valeurs étant substituées dans l'équation [81], ainsi que les données $p = 40\ 000$ et $e = 0,01$ produisent

$$R' = \frac{p a}{e} \left(1 + \frac{3.0,006}{2.0,503.0,01} \right) \\ = 2\ 012\ 000 (1 + 1,79) = 5\ 613\ 500 ;$$

de sorte que, avec les mêmes dimensions primitives, la tension n'est ici augmentée par l'excentricité que dans le rapport de 2,79 à 1.

FIN.

ERRATA ✓

Page 26, ligne 2, sa lisez la .

» 27, » 22, $(1 + iGh)$ lisez $(1 + i) Gh$.

» 48, » 9, $\frac{9}{128}$ lisez $-\frac{9}{128}$.

» 68, » 25, [2] du n° 52 lisez [29] du n° 51 .

» 68, dernières lignes, $-Q_1, -Q_2, -Q_{n-1}, -Q_n$ lisez
 $+Q_1, +Q_2, +Q_{n-1}, +Q_n$.

» 75, ligne 4, en remontant, μ lisez μ_1 .

» 76, » 4, μ » μ_1 .

» 81, » 7, $+_2$ » $+\mu_2$.

» 83, tableau 1^{re} col., lig. 15, lisez $p_1 = p_s = p + p_e, p_2 = p$.

» » » 2° » » 11, » 1^{re} travée $X_1 (p + p_e)$.

» » » » » 12, » 2° » $X_2 (p + p_e)$.

» 116, lignes 1, 3 et 11, 65 lisez. 66 .

» 118, après la ligne 18, mettez : La charge verticale répartie
sur $AB = pL$.

» 121, ligne 7, S, U, S, S'', U, U'' lisez S, U, S', S'', U', U'' .

» 122, » 10, U' lisez U'' . ✓

